Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
и
контрольные задания

Минск 2002

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
энергетических и инженерно-педагогических
специальностей

2-е издание

Под общей редакцией **Н.П.Кеда**

Минск 2002

УДК 519.2

Предлагаемое издание предназначено для студентов-заочников энергетических и инженерно-педагогических специальностей.

Оно содержит экзаменационную программу по курсу высшей математики, контрольные задания и методические указания по их выполнению.

Первое издание вышло в 1999 году.

Составители:

Е.В.Емеличева, В.В.Карпук, Н.П.Кеда, В.Д.Малыхина,
Е.С.Матюш, И.Н.Мелешко, Н.А.Шавель

Рецензент Н.Н.Роговцов

F

Введение

Общий курс математики является фундаментом математического образования инженера, имеющим важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами.

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным Материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала но учебной литературе, решения задач, выполнение контрольных работ.

Когггрольную работу следует выполнять в тетради (отдельной для каждой работы) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента. Решение задач располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи надо выписать Полиостью ее условие.

Решение задач И примеров нужно излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке. Чертежи нужно выполнять аккуратно и в соответствии с данными условиями. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием и, по возможности, в общем виде. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, чисел я, с и т.д.

Если при проверке решения задач преподавателем будут обнаружены ошибки, работа высылается студенту для исправления ошибок. Все исправления надо сделать в той же Тетради в конце работы и представить на повторную проверку.

В помощь студентам-заочникам иа кафедре в течение семестра по субботам (с 10.00 до 13.00) проводятся консультации и собеседования по контрольным работам, принимаются переэкзаменовки.

Допуском к экзамену является зачет по контрольным работам, предусмотренным учебным планом в текущем семестре.

Количество контрольных работ в каждом семестре и их содержание зависит от специальности и приведено в таблицах. Содержание контрольных работ в случае необходимости может быть изменено и объявлено преподавателем на установочных лекциях.

При выполнении контрольных работ студент выбирает свой вариант, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Преподаватель может изменить правило выбора варианта.

Рекомендуемая литература

' %*АпатенокР. Ф., Маркина А.М., Попова И.В., Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Мн.: Вышэишая школа, 1986.*

2. *Герасимович АЛ., РысюкНА. Математический анализ: Справочное пособие, V.I. -Мн.: Вышэишая шкопа, 1989.*
3. *Герасимович А.Я., Кеда Н.П., СугакМ.Б. Математический анализ: Справочное пособие, 4.2. - Мн.: Вышэишая школа. 1990.*
4. *Герасимович А.Я. Математическая статистика - Мн.:Выипйшан школа, 1983.*

У^Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.

6. *Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. - Мн.: Вышэишая школа, 1988.*

17. *Гусак А А. Пособие к решению задач по высшей математике -* ~ ки.: *Изд-во БГУ, 1973.*

{8. *Данко П.Е., ПоповА.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика* а *упражнениях и задачах. В 2 ч. -А/..- Высшая школа, 1997.*

(у. *ПискуновН.С. Дифференщ&лшое и интегральное исчисления* Л *2 т. -М.: Наука, 1985.*

ГвуСборник задач по математическому анализу для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. -М: Наука. 1981.

11. *Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред.4.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.-М.: Наука, 1981.*
12. *Сухая Т.А., Бубнов В. Ф. Задачи по высшей математике. В 2 ч,- Мн.: Вышэишая школа, 1993.*

Тема **1:** Линейная алгебра. Аналитическая геометрия

Вопросы

1. *Матрицы.основные понятия. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.*
2. *Определители, их свойства, вычисление.*
3. *Обратная матрица. Ранг матрицы.*
4. *Системы яинейных алгебраических уравнений, основные методы их решения (формулы Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса).*
5. *Решение произвольных систем. Теорема Кронекера-Капелли.*
6. *Однородные системы.*
7. *Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, вычисление и применение.*
8. *Деление отрезка я данном отношении.*
9. *Плоскость. Различные виды уравнения плоскости.*
10. *Прямая на плоскости и в пространстве.*

11: Кривые второго порядка.

12. Поверхности второго порядка. - •

Контрольные задания

Y Задание 1.1. Доказать совместность данных систем и решить их двумя способами; а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы.

Варианты

1./2xГ-3x_2+ x_3 = -4;
Ьx, + x, + 3x_3 = -3;
VXt- Xj+ x_3 =-3.

2. fx, + 3x_2*4x_3 = б;
J3x_t- x_2 + 3x_3 = 7;
Ч3x,-4Xj+7x_3 = -l.

3.px,+4xi + 2x_3 =-8;
Ьx,-4X»-3x_3 = J;
I x, + 2xj - 2x_3 =6.

4. Г3x» + 4x, + 2$x_э$ = 8;
J2xi-4Xj -3x_3 = -1;
lx$_t$ + 3x,+ 4xj=n.

5.^5x,+8xt- $x_э$ = 7;
Ьx,-3x_2 + 2x, = 9;
1x_1+2$x_г$ + 3x_3=1.

6. Г2x| - x_2 + 5xз = 4;
}5x, +2xг+13x_3 = 2;
V Эx» - X} +4x_3 = -2.

7. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

√ **Задание 1.2.** Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Варианты

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2; \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3; \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0; \\ x_1 + 10x_2 - 17x_3 + 34x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 25x_2 - 9x_3 - 7x_4 = 4; \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5; \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 2; \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1; \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 1; \\ x_1 - 5x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7. \end{cases}$

Задание 1.3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:
1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) уравнение прямой A_1A_2; 4) уравнение плоскости, в которой лежит грань $A_1A_2A_3$; 5) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) объем пирамиды; 7) сделать чертеж.

Варианты: 1. $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(-1; 2; 4)$, $A_3(2; 0; 6)$, $A_4(-2; 5; -1)$.
2. $A_1(0; 5; 0)$, $A_2(2; 3; -4)$, $A_3(0; 0; -6)$, $A_4(-3; 1; -1)$.
3. $A_1(3; 1; 4)$, $A_2(-1; 6; 1)$, $A_3(-1; 1; 6)$, $A_4(0; 4; -1)$.
4. $A_1(6; 6; 2)$, $A_2(5; 4; 7)$, $A_3(2; 4; 7)$, $A_4(7; 3; 0)$.
5. $A_1(9; 5; 5)$, $A_2(-3; 7; 1)$, $A_3(5; 7; 8)$, $A_4(6; 9; 2)$.
6. $A_1(1; -1; 5)$, $A_2(4; 4; -1)$, $A_3(-1; 2; 0)$, $A_4(5; 1; 5)$.
7. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 5)$, $A_4(1; 4; 0)$.
8. $A_1(1; 1; 3)$, $A_2(3; 5; 4)$, $A_3(3; 2; 4)$, $A_4(0; 4; 1)$.
9. $A_1(1; 1; 5)$, $A_2(2; 5; 1)$, $A_3(1; 4; 3)$, $A_4(5; 3; 2)$.
10. $A_1(1; 4; 2)$, $A_2(3; 1; 2)$, $A_3(5; 2; 4)$, $A_4(2; 3; 4)$.

Задание 1.4

Варианты

1. Написать уравнение прямой, проходящей через центр кривой $x^2 + 2y^2 - 2x + 12y + 15 = 0$ и образующей с осью Ох угол 45°. Назвать кривую, сделать чертеж.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через верхний фокус кривой $9x^2 + 5y^2 + 36x - 10y - 4 = 0$ и отсекающей на оси Ох отрезок $a = 5$. Назвать кривую, сделать чертеж.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через левый фокус кривой $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$ и отсекающей на оси Оу отрезок $b = 5^{1/2}$. Назвать кривую, сделать чертеж.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через фокус кривой $x^2 + 6x - y + 5 = 0$ и точку $A(0, -2)$. Сделать чертеж.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точки пересечения кривой $x^2 + y^2 + 10x - 25y + 25 = 0$ с осями координат. Назвать кривую, сделать чертеж.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через нижний фокус кривой $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 = 0$ и пересекающей ось Ох под углом 130°. Назвать кривую, сделать чертеж.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через правую и верхнюю вершины кривой $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y - 36 = 0$. Назвать кривую, сделать чертеж.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через фокус кривой $x^2 - 8x + 6y - 20 = 0$ и точку ее пересечения с осью Оу. Назвать кривую, сделать чертеж.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через центр кривой $x^2 + y^2 - 2x = 0$ и образующей угол 30° с осью Ох. Назвать кривую, сделать чертеж.

10. Написать уравнение асимптот кривой $4x^2 - 9y^2 + 24x - 54y - 81 = 0$. Назвать кривую, сделать чертеж.

Задание 1.5. Построить тело V, ограничешюс поверхностями, и его проекцию D на плоскость xOy.

Варианты

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z - 8 = 0$.
2. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.
3. $x^2 + y^2 = z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$.
4. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z = 3$, $z = 0$.
5. $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, $y = 3$, $y = -3$.
6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.
7. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.
8. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = z$, $z = 0$, $z = 3$.
10. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 4$.

Методические указания к решению задач
по теме "Линейная алгебра. Аналитическая геометрия"

Пример 1.1. *Исследовать на совместность и решить систему*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. *Вычислим определитель системы:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 41.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение.

1). Решим систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_i - определитель, получающийся из определителя системы Δ заменой i - го столбца столбцом свободных членов.

Вычислим определители Δ_i (i = 1, 2, 3):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 82;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -41;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 123.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3$.

2) Решим систему методом обратной матрицы. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{bmatrix}. \; X = A^{-1}B =$$

$$= \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 11\cdot 8 + 6(-1) + (-4)\cdot 0 \\ -5\cdot 8 + 1(-1) + 13\cdot 0 \\ 14\cdot 8 + (-11)(-1) + (-20)\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 82 \\ -41 \\ 123 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Пример 1.2. *Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3; \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 1; \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. *Разделив первое уравнение системы на 2 (на коэффициент при x_1), получим уравнение*

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1. \qquad (*)$$

Если коэффициент при x_1 в первом уравнении равен нулю, то на первое место можно поставить уравнение, коэффициент при x_1 в котором отличен от нуля. Если же в системе имеется уравнение, коэффи-

циент при x_1 в котором равен 1, то лучше на первое место поставить это уравнение.

*Далее, используя уравнение (*), с помощью элементарных преобразований нужно обратить в нуль коэффициенты при переменной x_1 во всех уравнениях, начиная со второго. Для этого уравнение (*) умножим на 3 и вычтем из второго, умножим это уравнение на 4 и вычтем из третьего и, наконец, умножим уравнение (*) на 3 и вычтем из четвертого уравнения исходной системы. В результате получим систему*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ \quad -6x_2 - 4x_3 - 8x_4 = -6; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -3; \\ \quad -3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -3, \end{cases} \qquad (**)$$

равносильную исходной.

На втором шаге метода Гаусса первое уравнение системы (**) оставляют без изменения, а с помощью второго уравнения обращают в нуль коэффициенты при неизвестном x_2 во всех уравнениях, начиная с третьего и т.д.

Описанные выше преобразования упрощения записи проводятся не над уравнениями системы, а над строками ее расширенной матрицы. Для исходной системы эти преобразования примут вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & 9 & 2 & 12 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

После трех шагов метода Гаусса два последних уравнения системы имеют вид $0 = 0$. Если бы среди этих уравнений было уравнение вида $0 = b$ и $b \neq 0$, то система была бы несовместной.

Последней матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ \quad x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $x_2 = 1 - 2/3\, x_3 - 4/3\, x_4$, $x_1 = -2 + x_3$.

Введя обозначения $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, получаем общее решение системы:

$$x_1 = -2 + C_1,\ x_2 = 1 - 2/3\,(C_1 + 2C_2),\ x_3 = C_1,\ x_4 = C_2,$$

где C_1 и C_2 могут принимать любые действительные значения.

Пример 1.3. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A_1(1, 3, 5)$, $A_2(3, 4, 1)$, $A_3(2, 5, 5)$, $A_4(1, 4, 3)$. Найти: 1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) уравнение прямой A_1A_2; 4) уравнение плоскости, в которой лежит грань $A_1A_2A_3$; 5) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 6) объем пирамиды.

Решение. Найдем векторы

$\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. $\overrightarrow{A_1A_2} = (2, 1, -4)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 2, 0)$,

$\overrightarrow{A_1A_4} = (0, 1, -2)$.

1). Угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 – это угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-4)\cdot 0}{\sqrt{4+1+16}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{105}}, \quad \varphi = \arccos\frac{4}{\sqrt{105}}.$$

2). Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, то есть

$S = 1/2 \left|[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}]\right|$. *Найдем* $[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}]$:

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= 8\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Поэтому $S = \frac{1}{2}\sqrt{64+16+9} = \frac{\sqrt{89}}{2}$ *(ед.^{2}).*

3). За направляющий вектор $\vec{s}$ прямой A_1A_2 примем вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$. Тогда канонические уравнения этой прямой примут вид

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-4}.$$

4). За нормальный вектор искомой плоскости можно принять векторное произведение векторов $[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}] = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

U

Тогда уравнение искомой плоскости можно записать в виде
$8(x-1)-4(y-3)+3(z-5)=0$ *или* $8x-4y+3z-11=0.$

5). Так как нормальный вектор $\vec{n}$ *(8, -4, 3) плоскости* $A_1A_2A_3$ *является направляющим вектором высоты, опущенной из точки* A_4 *на грань* $A_1A_2A_3$*, то уравнение этой высоты будет иметь вид*

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-3}{3}.$$

6). Объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$*, объем которого равен модулю смешанного произведения этих векторов. Вычислим это произведение:*

$$(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4})=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(8+2)=-10.$$

Следовательно, $V=10/6=5/3$ *(ед.*^{3}*).*

Пример 1.4. *Написать уравнение прямой, проходящей через центр кривой* $8x^2+4y^2+24x-20y+11=0$ *и образующей угол* 60° *с осью Ox. Назвать кривую, сделать чертеж.*

Решение. *Приведем уравнение кривой к каноническому виду:*

$$8(x^2+3x+9/4)+4(y^2-5y+25/4)+11-18-25=0;$$

$$8(x+3/2)^2+4(y-5/2)^2=32; \qquad \frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4}+\frac{(y-\frac{5}{2})^2}{8}=1.$$

Это эллипс с центром в точке $O_1(-3/2, 5/2)$.

Подставляя значение координат точки O_1 *и углового коэффициента* $k=tg\,30^\circ=\sqrt{3}$ *в уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении, получаем уравнение*

$y-5/2=\sqrt{3}(x+3/2)$ *или* $2\sqrt{3}-2y+5+3\sqrt{3}=0.$

Введем новые переменные $X=x+3/2$, $Y=y-5/2$*, получим каноническое уравнение эллипса* $X^2/4+Y^2/8=1$ *с полуосями* $a=2$, $b=2\sqrt{2}$.

Построив старую и новую систему координат (началом новой системы координат является точка O_1*), получим требуемый рисунок (рис. 1).*

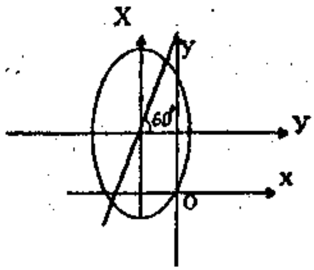


Рис.1

Пример 1.5. *Построить тело V, ограниченное поверхностями $y = x^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и его проекцию на плоскость $x0y$.*

Решение. *В декартовой системе координат строим поверхности (рис.2), ограничивающие тело: $y = x^2 + z^2$ - параболоид вращения с осью $0y$ и вершиной в начале координат; $x = 0$ - плоскость $y0z$; $z = 0$ - плоскость $x0y$; $y = 1$ - плоскость, параллельную плоскости $x0z$.*

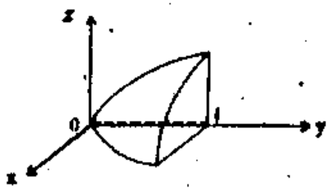


Рис.2

На плоскость $x0y$ оно проектируется в область, ограниченную параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$ и $y = 1$ (рис.3).

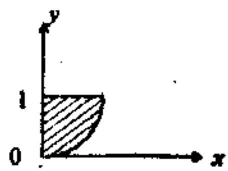


Рис. 3

Тема 2. Введение в математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной

Вопросы

Введение в математический анализ

1. *Понятие множества. Основные операции над множествами. Множество действительных чисел и его подмножества.*
2. *Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грани множества.*
3. *Комплексные числа.*
4. *Полярная система координат.*
5. *Функция. Способы задания функции. Гиперболические функции.*
6. *Обратные функции, их свойства.*
7. *Числовая последовательность, ее предел. Число e . Натуральные логарифмы.*
8. *Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Односторонние пределы.*
9. *Основные теоремы о пределах функции.*
10. *Бесконечно малые функции и их свойства.*
11. *Бесконечно большие функции. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.*
12. *Сравнение бесконечно малых функций. Символы "о" и "О".*
13. *Замечательные пределы.*
14. *Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных в точке функций. Непрерывность основных элементарных функций.*
15. *Точки разрыва функции, их классификация.*
16. *Функции, непрерывность на отрезке и их свойства.*

Дифференцирование функции одной переменной

1. *Производная функции. Ее геометрический и механический смысл.*
2. *Дифференцируемость функции.*
3. *Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.*
4. *Правила дифференцирования функций.*
5. *Дифференцирование сложной и обратной функций.*
6. *Производные элементарных функций.*
7. *Логарифмическое дифференцирование.*
8. *Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.*
9. *Производные и дифференциалы высших порядков.*
10. *Теоремы о среднем значении: Ролля, Лагранжа, Коши.*
11. *Правило Лопиталя.*
12. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

13. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$.

14. Условия возрастания и убывания функции.

15. Точки локального экстремума. Необходимое и достаточные условия.

16. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции.

17. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.

18. Асимптоты кривых.

19. Общая схема исследования функций и построения их графиков.

Векторные и комплексные функции действительного переменного

1. Векторная функция скалярного аргумента. Годограф вектора. Производная вектор-функции. Геометрический и механический смысл производной.

2. Параметрические уравнения кривой в пространстве.

3. Многочлен в комплексной области. Теорема Безу.

4. Корни многочлена. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные и квадратичные множители.

Контрольные задания

Задание 2.1. Дано комплексное число z. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 - z = 0$.

Варианты

1. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$; 2. $z = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$; 3. $z = \dfrac{-4}{1-i\sqrt{3}}$; 4. $z = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$;

5. $z = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1+i}$; 6. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$; 7. $z = \dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$; 8. $z = \dfrac{-4}{\sqrt{3}-i}$;

9. $z = \dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$; 10. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$.

Задание 2.2. Найти указанные пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

Варианты

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; c) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

2. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; $b)\ \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; $c)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; $e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)(\ln(x+2)-\ln x)$.

3. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

4. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{5x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

5. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-7x^2+4}{3x^4+5x-2}$; $b)\ \lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x-4}{x^2+x-20}$; $c)\ \lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg}2x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

6. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$; $c)\ \lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(\ln(2x+3)-\ln(2x-4))$.

7. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x-2}{x^3-2x^2+1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$; $c)\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}3x$; $e)\ \lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

8. $a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$; $c)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

$d)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; $e)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)(\ln(1-x)-\ln(2-x))$.

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$; c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} x\sin 2x\,ctg^2 3x$; e) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

Задание 2.3. Функция $y = f(x)$ задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Требуется найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

Варианты

1. $y=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0;\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2;\\ x+1, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x>3;\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 3;\\ x+2, & \text{если } x>3.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases} x-3, & \text{если } x\le 0;\\ x+1, & \text{если } 0<x\le 4;\\ 3+x^{1/2}, & \text{если } x>4.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases} (1-x)^{1/2}, & \text{если } x\le 0;\\ 0, & \text{если } 0<x\le 2;\\ x-2, & \text{если } x>2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases} 2x^2, & \text{если } x\le 0;\\ x, & \text{если } 0<x\le 1;\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases} \sin x, & \text{если } x\le 0;\\ x, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 0, & \text{если } x>2.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases} \cos x, & \text{если } x\le \pi/2;\\ 0, & \text{если } \pi/2<x<\pi;\\ \pi/2, & \text{если } x\ge \pi.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases} x-1, & \text{если } x\le 0;\\ x^2, & \text{если } 0<x<2;\\ 2x, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases} 3x+1, & \text{если } x<0;\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1;\\ 0, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0<x<\pi/2;\\ x+2, & \text{если } x\ge \pi/2.\end{cases}$

Задание 2.4. Найти производные следующих функций:

Варианты

1. a) $y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[3]{(6x-1)^2}$; b) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$; c) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

$d)\ y=x^{\frac{1}{x}}$; $\quad e)\ x\sin y-y\cos x=0.$

2. $a)\ y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}}-4\sqrt{1+x}$; $\quad b)\ y=\sin^2 3x$; $\quad c)\ y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

$d)\ y=x^{e^x}$; $\quad e)\ e^{xy}-x^2+y^2=0.$

3. $a)\ y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; $\quad b)\ y=\sqrt{1+\ln^2 x}$; $\quad c)\ y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

$d)\ y=x^{\operatorname{arctg} x}$; $\quad e)\ y\sin x\cos(x-y)=\cos y.$

4. $a)\ y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $\quad b)\ y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$; $\quad c)\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$;

$d)\ y=(\cos x)^{\cos x}$; $\quad e)\ x\sin y-y\cos x+y^2=0.$

5. $a)\ y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; $\quad b)\ y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$; $\quad c)\ y=\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;

$d)\ y=(\ln x)^x$; $\quad e)\ x-y+e^y\operatorname{arctg}x=0.$

6. $a)\ y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$; $\quad b)\ y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}-x$; $\quad c)\ y=\operatorname{arctg}(\sin x)$;

$d)\ y=2^x\cdot e^{-x}$; $\quad e)\ \ln y=\arcsin\dfrac{x}{y}.$

7. $a)\ y=5\sqrt[5]{4x+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$; $\quad b)\ y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; $\quad c)\ y=\arccos(\operatorname{tg}x)$;

$d)\ y=x^2e^{\cos x}$; $\quad e)\ x+y+e^{xy}=2.$

8. $a)\ y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}$; $\quad b)\ y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$; $\quad c)\ y=\dfrac{\arccos x}{x}$;

$d)\ y=(\cos x)^{x^2}$; $\quad e)\ 2x^2+xy-y^2=0.$

9. $a)\ y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $\quad b)\ y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad c)\ y=\arccos e^x$;

$d)\ y=x^{\arcsin x}$; $\quad e)\ \ln y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

10. $a)\ y=x+\sqrt[3]{\dfrac{1+x^5}{1-x^3}}$; $\quad b)\ y=\operatorname{tg}^2(x^2+1)$; $\quad c)\ y=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

$d)\quad y = x^{\lg x}; \qquad e)\quad xy + \arcsin(x+y) = 0.$

Задание 2.5. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции.

Варианты

1. $x = at\cos t;$ 2. $x = \cos\frac{t}{2};$ 3. $x = t - \sin t;$ 4. $x = t^2;$ 5. $x = \cos at,$

$y = at\sin t,\quad y = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t,\quad y = \frac{1}{3}t^3 - t,\quad y = \sin at;$

6. $x = \sin\frac{t}{2};$ 7. $x = e^{2t};$ 8. $x = tgt + ctgt;$ 9. $x = t^2 + 1;$ 10. $x = 3\cos^2 t,$

$y = \cos t,\quad y = \cos t,\quad y = 2\ln ctgt,\quad y = e^{t^3},\quad y = 2\sin^3 t.$

Задание 2.6. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

Варианты

1. $a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}; b)\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}.$ 2. $a)\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}; b)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx^{ctgx}.$

3. $a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx - 1}{1-\cos x}; b)\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\sin x}.$ 4. $a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{x - \sin x}; \quad b)\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$

5. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}; b)\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg3x.$ 6. $a)\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{ctgx}; b)\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

7. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}; b)\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{\sin x}.$ 8. $a)\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx; b)\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}.$

9. $a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}; b)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{\cos x}.$ 10. $a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - tgx}; b)\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}.$

Задание 2.7. Исследовать функции методами дифференциального исчисления. На основании результатов исследования построить графики этих функций.

Варианты

1. $y = \frac{x^2+1}{x}.$ 2. $y = \frac{1}{1+x^2}.$ 3. $y = \frac{e^x}{x}.$ 4. $y = x\cdot e^{-x^2}.$ 5. $y = \frac{1}{1-x^2}.$

6. $y = \ln(1-2x).$ 7. $y = x\ln x.$ 8. $y = \frac{x}{3-x^2}.$ 9. $y = \ln\left(x^2 - 9\right).$ 10. $y = \frac{\ln x}{x}.$

Задание 2.8

1. Из бревна, имеющего форму усеченного конуса, надо вырезать балку в форме параллелепипеда, поперечное сечение которого представляет собой квадрат, а ось совпадает с осью бревна. Найти размеры балки, при которых объем ее будет наибольшим, если диаметр большего основания бревна равен 5 дм, диаметр меньшего основания равен 4 дм, длина бревна (считая по оси) равна 6 м.

2. Сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой, должен вмещать 18 л воды. Найти размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.

3. Требуется изготовить из жести ведро данного объема V цилиндрической формы без крышки. Найти высоту цилиндра и радиус его основания, при которых на ведро уйдет наименьшее количество жести.

4. Требуется поставить палатку данного объема V , имеющую форму прямого кругового конуса. Найти отношение высоты конуса к радиусу его основания, при котором на палатку уйдет наименьшее количество материала.

5. Через точку A(2, 1) провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых на осях координат, была наименьшей.

6. На странице книги печатный текст (вместе с промежутками между строками) должен занимать 216 см ^{2}. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое - по 2 см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

7.Окно имеет форму прямоугольника,завершенного полукругом. Периметр окна равен 300 см. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

8. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

9. Найти высоту прямого круглого конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

10. Найти основания и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр; угол при большем основании трапеции равен α.

Методические указания к решению задач по теме "Введение в математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной"

Таблица производных основных элементарных функций

1. $y=c$; $y'=0$.
2. $y=u^{\alpha}, \alpha\in R$; $y'=\alpha u^{\alpha-1}u'$.
3. $y=a^{u}$; $y'=a^{u}\cdot \ln a\cdot u'$.
4. $y=e^{u}$; $y'=e^{u}\cdot u'$.
5. $y=\log_a u$; $y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$.
6. $y=\ln u$; $y'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$.
7. $y=\sin u$; $y'=\cos u\cdot u'$.
8. $y=\cos u$; $y'=-\sin u\cdot u'$.
9. $y=tg\, u$; $y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
10. $y=ctg\, u$; $y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
11. $y=\arcsin u$; $y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
12. $y=\arccos u$; $y'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
13. $y=arctg\, u$; $y'=\dfrac{u'}{1+u^2}$.
14. $y=arcctg\, u$; $y'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.
15. $y=sh\, u$; $y'=ch\, u\cdot u'$.
16. $y=ch\, u$; $y'=sh\, u\cdot u'$.
17. $y=th\, u$; $y'=\dfrac{u'}{ch^2 u}$.
18. $y=cth\, u$; $y'=-\dfrac{u'}{sh^2 u}$.

Пример 2.1. *Комплексное число $z=1/(1-i)$ записать в алгебраической и тригонометрической формах. Найти все корни уравнения $w^3-z=0$.*

Решение. *Запишем число z в алгебраической форме $z=x+iy$.*

$$z=\frac{1}{1-i}=\frac{1(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Чтобы записать комплексное число z в тригонометрической форме, надо найти его модуль и аргумент:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение φ, удовлетворяющее системе

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \text{и условию } 0\le\varphi<2\pi,$$

и будет главным значением аргумента комплексного числа z.

В нашем случае $\cos\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *а поэтому* $\varphi = \pi/4$.

Следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. *Найдем корни уравнения* $w^3 - z = 0$ *или* $w = \sqrt[3]{z}$. *Для этого воспользуемся формулой*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Подставляя в эту формулу $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 3$, *получаем*

$$w_k = \sqrt[3]{z} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right),$$

откуда при $k = 0, 1, 2$ *получаем три корня уравнения* $w^3 - z = 0$:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2};$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right).$$

Пример 2.2. *Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2 + 3x + 5}{2x^2 + x + 7}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 5x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x - 1)(\ln(2x - 1) - \ln(2x + 1))$.

Решение. *a). Предел представляет собой неопределенность вида* ∞/∞. *Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень* x, *т.е. на* x^2, *получаем:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2 + 3x + 5}{2x^2 + x + 7} = \lim_{x\to\infty}\frac{5 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{5}{2}.$$

b). Предел представляет собой неопределенность вида 0/0.

Разложив числитель и знаменатель на множители, имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{6}{3}=2.$$

c). Предел представляет собой неопределенность вида 0/0.

Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $(x+4)^{1/2}+2$ *:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\sqrt{x+4}+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{2}.$$

d). Предел представляет собой неопределенность вида 0/0.

Применив формулу $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$, *получим:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}.$$

*Используя **первый замечательный предел*** $\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$,

имеем:
$$\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5}{2}x}\right)^2\cdot\frac{25}{4}=2\cdot\frac{25}{4}=\frac{25}{2}.$$

e). Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, используя свойства логарифмов.

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-1)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))=\lim_{x\to+\infty}(3x-1)\ln\frac{2x-1}{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1-2}{2x+1}\right)^{3x-1}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^{3x-1}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{2x+1}{2}}\right)^{-\frac{2x+1}{2}}\right)^{-(3x+1)\frac{2}{2x+1}}=\ln e^{-2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x+1}}=\ln e^{-2\cdot\frac{3}{2}}=$$

$$=\ln e^{-3}=-3.$$

*При вычислении использован **второй замечательный предел**:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 2.3. *Исследовать на непрерывность функцию*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если} \quad x \le 0; \\ (x-1)^2, & \text{если} \quad 0 < x \le 2; \\ 4 - x, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Сделать чертеж.

Решение. *Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Так как эта функция задана тремя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x, то она может иметь разрывы в точках $x = 0$ и $x = 2$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.*

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x = 0$.

$f(0) = (1 - x^2)\big|_{x=0} = 1$, т.е. функция определена при $x = 0$.

Найдем односторонние пределы функции при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}\left(1 - x^2\right) = 1, \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x-1)^2 = 1.$$

Так как односторонние пределы при $x \to 0$ равны значению функции в точке $x = 0$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x = 2$.

$f(2) = (x - 1)^2\big|_{x=2} = 1$; функция определена при $x = 2$.

Найдем односторонние пределы функции при $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x-1)^2 = 1; \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(4-x) = 2.$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то функция терпит разрыв первого рода.

Строим схематический график даной функции (рис.4).

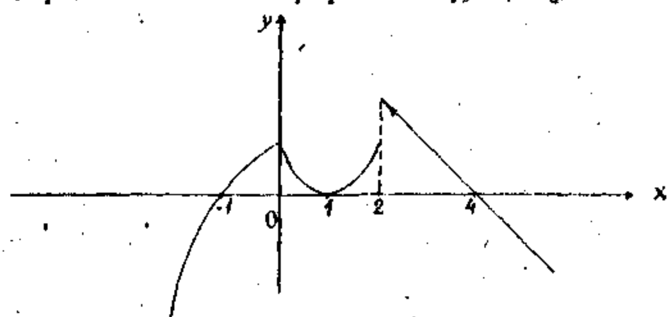


Рис.4

U

Пример 2.4. *Вычислить производные следующих функций:*

$$a)\ y=(\ln x)^{\sin x}; \qquad b)\ y^3=x^2+\ln\frac{y}{x}.$$

Решение. *а). Логарифмируя это равенство, получаем*

$$\ln y=\ln(\ln x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y=\sin x\ln(\ln x).$$

Дифференцируя обе части, имеем

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(\ln x)+\sin x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}; \qquad y'=y\left(\cos x\ln(\ln x)+\frac{\sin x}{x\ln x}\right);$$

$$y'=(\ln x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(\ln x)+\frac{\sin}{x\cdot\ln x}\right).$$

b). Так как зависимость между переменными x и y задана в неявном виде, то для нахождения производной достаточно продифференцировать обе части уравнения, считая y функцией от x, и из полученного уравнения найти y'.

$$3y^2y'=2x+\frac{1}{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}; \quad 3y^2y'=2x+\frac{x}{y}\cdot\frac{y'x-y}{x^2};$$

$$3y^2y'=2x+\frac{y'x-y}{xy}; \quad 3y^2y'=2x+\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}; \quad 3y^2y'-\frac{y'}{y}=2x-\frac{1}{x};$$

$$y'\left(3y^2-\frac{1}{y}\right)=\frac{2x^2-1}{x}; \quad y'\left(\frac{3y^2-1}{y}\right)=\frac{2x^2-1}{x}; \quad y'=\frac{y(2x^2-1)}{(3y^3-1)x}.$$

Пример 2.5. *Найти y'_x, y''_{xx}, если* $\begin{cases}x=\ln t;\\ y=t^3-1,\end{cases}$ $t\in(0;+\infty)$.

Решение. *Производная функции, заданной параметрически, находится по формуле $y'_x=y'_t/x'_t$.*

В нашем случае $x'_t=1/t$, $y'_t=3t^2$, а $y'_x=3t^2/(1/t)=3t^3$.

Запишем первую производную как функцию, заданную параметрически: $\begin{cases}y'_x=3t^3;\\ x=\ln t,\end{cases}$ $t\in(0,+\infty)$. *Тогда* $y''_{xx}=(y'_x)'_t/x'_t=9t^2/(1/t)=9t^3$.

Следовательно, вторая производная имеет вид $\begin{cases}y''_{xx}=9t^3;\\ x=\ln t,\end{cases}$ $t\in(0,+\infty)$.

Пример 2.6. *Используя правило Лопиталя, вычислить пределы:*

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}; \qquad b)\ \lim_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{1/x}.$$

Решение. а). Имеем неопределенность вида 0/0, которую раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg} x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)}=0.$$

b). Имеем неопределенность вида 1^∞. Пусть $y=(e^x+x)^{1/x}$. Логарифмируя это равенство и используя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2.$$

***Пример 2.7.** Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^2$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.*

***Решение.** Обозначим сторону основания бассейна через x, а высоту через y. Тогда его объем будет равен $V=x^2y=32$. Выразив y через x, получаем $y=32/(x^2)$, а площадь облицовываемой поверхности бассейна равна $S=x^2+4xy=x^2+4x\cdot 32/(x^2)=x^2+128/x$. Исследуем полученную функцию на экстремум в промежутке $(0;+\infty)$:*

$$S'=2x-128/(x^2);\quad 2x-128/(x^2)=0;\quad x=4.$$

Найденная единственная точка дает наименьшее значение функции S, так как наибольшего значения у нее нет (она неограниченно возрастает при $x\to 0$ и $x\to\infty$).

Ответ. Искомые размеры бассейна $x=4$ м, $y=2$ м.

***Пример 2.8.** Провести полное исследование функции $y=x/(x+1)^2$ и построить ее график.*

***Решение.** Общее исследование функции удобно выполнять по следующей схеме:*

1. Найти область определения функции.

2 Выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической.

3. Найти точки пересечения графика с осями координат.

4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрыва.

5. *Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Найти интервалы возрастания и убывания функции.*
6. *Найти точки перегиба графика функции. Установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.*
7. *Найти асимптоты графика функции.*
8. *Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости уточнив отдельные участки кривой, можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек.*

1. *Область определения функции* $y = x/(x+1)^2$: $Д(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
2. *Функция не является ни четной, ни нечетной, так как*

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x+1)^2} = -\frac{x}{(-x+1)^2};\ f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x).$$

3. *Найдем точки пересечения кривой с осями координат:* $x = 0$ *и* $y = 0$. *Значит, О(0; 0) - точка пересечения.*
4. *Функция имеет разрыв второго рода в точке* $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1+0}{(-1+0+1)^2} = -\infty;\quad \lim_{x\to -1-0} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = -1$ *является вертикальной асимптотой.*

5. *Определим точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции:*

$$y' = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}.\quad y' = 0 \text{ при } x = 1 \Rightarrow$$

$x = 1$ *- критическая точка первого рода. Производная не определена в точке* $x = -1$. *Однако эта точка не является критической, так как в ней не определена и сама функция.*

Точки $x = -1$ *и* $x = 1$ *разбивают числовую ось на три интервала.*

Исследуем знак y' *на каждом из этих интервалов, результаты поместим в таблицу.*

x	$(-\infty; 1)$	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	+	0	-
y	↘	↗	1/4	↘
			max	

Из таблицы видно, что функция убывает при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, *а возрастает при* $x \in (-1; 1)$. *При переходе через критическую точку первого рода* $x = 1$ y' *меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке* $x = 1$ *функция имеет максимум:* $f(1) = 1/(1+1)^2 = 1/4$.

6. Определим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

Найдем y'': $y'' = \frac{-(x+1)^3 - 3(x+1)^2(1-x)}{(x+1)^5} = \frac{-x-1-3+3x}{(x+1)^4} = \frac{2x-4}{(x+1)^4}$.

$y'' = 0$ при $x = 2$ $\Rightarrow x = 2$ - критическая точка второго рода.

$x = -1$ и $x = 2$ разбивают числовую ось на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$. Определим знак y'' на каждом из этих интервалов.

Заполним таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	$(-1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	-	-	0	+
y	выпуклая	выпуклая	$2/9$	вогнутая
	∩	∩		∪

При переходе через критическую точку $x = 2$ слева направо y'' меняет свой знак. Так как $f(2) = 2/(2+1)^2 = 2/9$, то точка $(2; 2/9)$ является точкой перегиба графика функции.

7. Определим наклонные асимптоты. Уравнение такой асимптоты имеет вид $y = kx + b$,

$$где\ k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ является двусторонней горизонтальной асимптотой.

8. Построим график функции (рис.5).

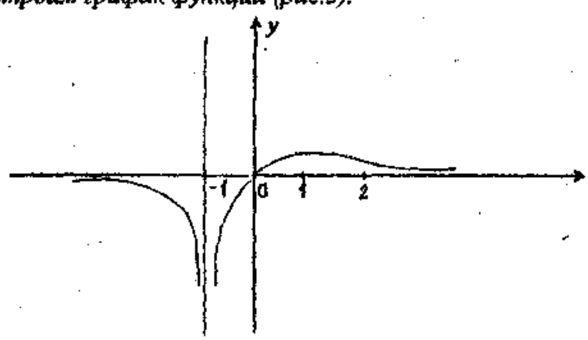


Рис.5

Тема 3: Неопределенный и определенный интегралы

Вопросы

1. *Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.*
2. *Таблица основных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.*
3. *Интегрирование простейших рациональных дробей.*
4. *Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей.*
5. *Интегрирование тригонометрических функций.*
6. *Интегрирование иррациональных функций.*
7. *Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.*
8. *Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции и работе переменной силы).*
9. *Определенный интеграл как предел интегральных сумм.*
10. *Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.*
11. *Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.*
12. *Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.*
13. *Приближенное вычисление определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.*
14. *Вычисление площадей в прямоугольных и полярных координатах.*
15. *Вычисление длины дуги линии.*
16. *Вычисление объемов тел вращения.*
17. *Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести плоской кривой.*
18. *Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести плоских фигур.*
19. *Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций.*

Контрольные задания

Задание 3.1. Найти неопределенные интегралы.

Варианты

I. $a)\ \int x^3\sqrt{2x^4-5}\,dx;\qquad b)\ \int x\ln 3x\,dx;\qquad c)\ \int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx;$

$d)\ \int \sin^3 4x\cdot\cos^2 4x\,dx.$

2. a) $\int \frac{x^2}{4x^3-2}dx$; b) $\int x\cos(2x-1)dx$; c) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx$;

d) $\int \cos^2 3x\,dx$.

3. a) $\int x(x^2-4)^6dx$; b) $\int x\cdot e^{-4x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x^3-8}$;

d) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sin^4 2x}dx$.

4. a) $\int e^{-x^4}\cdot x^3dx$; b) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; c) $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$;

d) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}dx$.

5. a) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$; b) $\int (3x-4)\ln x\,dx$; c) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$;

d) $\int \frac{dx}{2-5\cos x+3\sin x}$.

6. a) $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int x\cdot\sin\frac{x}{2}dx$; c) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}dx$;

d) $\int \sin x\cdot\sin 3x\,dx$.

7. a) $\int \sqrt[3]{\cos 2x-4}\,\sin 2x\,dx$; b) $\int \ln x^2dx$; c) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$;

d) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

8. a) $\int \frac{\sqrt{\ln 2x}}{x}dx$; b) $\int (2x-3)\sin 3x\,dx$; c) $\int \frac{x^2-4}{x^3+x^2+2x}dx$;

d) $\int \cos 3x\cdot\cos 5x\,dx$.

9. a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-3}}dx$; b) $\int \arcsin\frac{x}{4}dx$; c) $\int \frac{x^2}{(x^2+4x+4)(x+1)}dx$;

d) $\int tg^4 2x\,dx$.

10. a) $\int \frac{\sqrt{tg3x-2}}{cos^2 3x}dx$; b) $\int arctg2x dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

d) $\int \frac{dx}{5-4\sin x}$.

Задание 3.2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. 2. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$. 3. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$. 4. $\int_2^{3} \frac{dx}{(x-2)^3}$. 5. $\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{x^2}dx$.

6. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. 7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. 8. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 9. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x+x^2}$. 10. $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задание 3.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

Варианты

1. $y = 2x - x^2$, $y = x^2$.
2. $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$.
3. $y = x^2$, $2x + y - 3 = 0$.
4. $y = (x - 4)^2$, $y = 16 - x^2$, $y = 0$.
5. $y = (x + 1)^2$, $x + y = 1$, $y = 0$.
6. $r = 4(1 + \cos\varphi)$.
7. $r = 5\sin3\varphi$.
8. $r = 2\cos3\varphi$.
9. $r = 3\sin2\varphi$.
10. $r = 4\cos2\varphi$.

Задание 3.4. Вычислить длину дуги кривой.

Варианты

1. $r = 2(1 - \cos\varphi)$.
2. $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
3. $r = 3(1 - \cos\varphi)$.
4. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.
5. $x = t^6/6$, $y = 4 - t^4/4$ между точками ее пересечения с осями координат.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$.
7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2/2$, $y = x^3/8$.
8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$.
9. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$.
10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy = 9$, $y = 3$, $y = 9$, $x = 0$.

Методические указания к решению задач по теме "Неопределенный и определенный интегралы"

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

2. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C \, (a > 0, a \neq 1).$

3. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + C.$

10. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C \, (a \neq 0).$

12. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C.$

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C \, (|u| < |a|).$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

15. $\int sh\, u = ch\, u + C.$

16. $\int ch\, u = sh\, u + C.$

17. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + C.$

18. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + C.$

Пример 3.1. *Вычислить интеграл* $\int (3x - 4)\sin 5x\,dx.$

Решение. *Применим формулу интегрирования по частям:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Положим $u = 3x - 4$, $dv = \sin 5x\,dx$, *тогда* $du = 3dx$, $v = \int \sin 5x\,dx = -\dfrac{1}{5}\cos 5x.$

$$\int (3x-4)\sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}(3x-4)\cos 5x + \frac{3}{5}\int \cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(3x-4)\cos 5x + \frac{3}{25}\sin 5x + C.$$

Пример 3.2. *Найти интеграл* $\int \frac{x^4+x^3+8x-2}{x^3+8}\,dx$.

Решение. *Подынтегральная функция является рациональной, т.е. отношением двух многочленов. Поскольку степень числителя дроби выше степени знаменателя, то нужно выделить целую часть. Для этого разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов.*

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+8x-2 & x^3+8 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4+8x\qquad} & x+1 \\ x^3-2 & \\ -\underline{x^3+8} & \\ -10 & \end{array}$$

В результате деления получаем

$$\frac{x^4+x^3+8x-2}{x^3+8} = \frac{x+1-10}{x^3+8} = x+1-\frac{10}{x^3+8}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^4+x^3+8x-2}{x^3+8}\,dx = \int (x+1)\,dx - 10\int \frac{dx}{x^3+8} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - 10\int \frac{dx}{x^3+8}.$$

Дробь $\frac{1}{x^3+8}$ *разложим на сумму простейших дробей:*

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

$$1 = A(x^2-2x+4)+(x+2)(Bx+C).$$

Найдем A, B, C, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0 \\ x & 2B+C-2A=0 \\ x^0 & 2C+4A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1/12,\ B = -1/12,\ C = 1/3.$$

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{12}\int\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-8}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-2x+4}=\frac{1}{12}ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{24}ln|x^2-2x+4|+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{24}ln|x^2-2x+4|+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{x^4+x^3+8x-2}{x^3+8}dx=\frac{x^2}{2}+x-10(\frac{1}{12}ln|x+2|-\frac{1}{24}ln|x^2-2x+4|+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}})+C=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{6}ln|x+2|+\frac{5}{12}ln(x^2-2x+4)-$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 3.3. *Вычислить несобственный интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$$ *или доказать его расходимость.*

Решение.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+$$

$$+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Интеграл сходится.

Пример 3.4. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой* $r=a\sin 3\varphi$.

М

Решение. Фигура, площадь которой нужно найти, представляет собой трехлепестковую розу (рис.6). В силу ее симметрии достаточно вычислить площадь половины любого лепестка и результат умножить на 6.

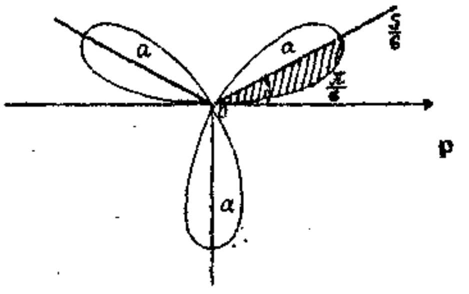


Рис. 6

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2 3\varphi\, d\varphi=3a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{3a^2}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 3.5. *Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси 0х фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y=0$.*

Решение. *Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$. Решая уравнение $x^2 = 2 - x$, находим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.*

Данная фигура (рис.7) состоит из двух частей: первой - ограниченной сверху параболой ($0 \le x \le 1$), и второй - ограниченной вверху прямой ($1 \le x \le 2$). Снизу фигура ограничена прямой $y = 0$.

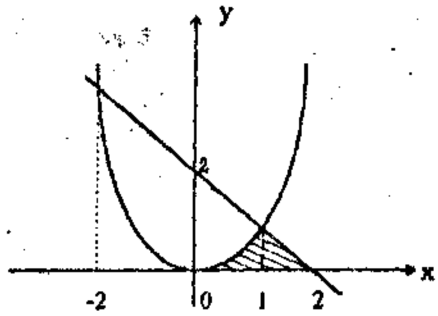


Рис.7

Поэтому $V = V_1 + V_2 =$

$$= \pi\int_0^1 x^4\,dx + \pi\int_1^2 (2-x)^2\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2\right) = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}\pi.$$

Тема 4. Функции нескольких переменных

Вопросы

1. *Определение функции двух и более переменных. Предел и непрерывность функции двух переменных.*
2. *Частные производные, их геометрический смысл для функции двух переменных.*
3. *Полный дифференциал функции нескольких переменных. Дифференцирование сложных функций, инвариантность формы полного дифференциала.*
4. *Дифференцирование неявных функций: $f(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.*
5. *Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.*
6. *Частные производные высших порядков. Формулировка теоремы о независимости частных производных от последовательности дифференцирования.*
7. *Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.*
8. *Достаточные условия экстремума для функции двух переменных.*
9. *Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.*
10. *Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.*

11. Эмпирические формулы. Определение параметров эмпирических формул методом наименьших квадратов.

Контрольные задания

Задание 4.1. Найти полный дифференциал функции.

Варианты

1. $z = \ln\left(1 + \frac{x^2}{y}\right)$. 2. $z = \sin^2(2x - y)$. 3. $z = \ln tg \frac{y}{x^2}$.

4. $z = arctg \frac{\sqrt{y}}{x}$. 5. $z = \sqrt{\cos(2x - y)}$. 6. $z = e^{x^3 - y^2}$.

7. $z = \frac{1}{\sqrt{x^3 - y^2}}$. 8. $z = tg^2\left(2x - \frac{y}{3}\right)$. 9. $z = \cos^3\left(x^2 - y^4\right)$.

10. $z = \frac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^3}$.

Задание 4.2

1. Дана функция $z = \frac{x}{y}$. Показать, что $x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2. Дана функция $z = \sin(x + ay)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. Дана функция $z = \frac{y}{x}$.

Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Дана функция $z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$.

Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$.

6. Дана функция $z = y \ln x + x \ln y$.

Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$.

7. Дана функция $z = \cos y + (y-x)\sin y$.

Показать, что $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8. Дана функция $z = e^{x/y}$. Показать, что $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

9. Дана функция $z = e^{xy}$.

Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

10. Дана функция $z = e^{y/x}$.

Показать, что $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Методические указания к решению примеров по теме "Функции нескольких переменных"

Пример. *Найти полный дифференциал функции*

$$z = tg(3 - 2y^2 x).$$

Решение.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2y^2}{\cos^2(3-2y^2x)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4xy}{\cos^2(3-2y^2x)};$$

$$dz = -\frac{2y^2}{\cos^2(3-2y^2x)}dx - \frac{4xy}{\cos^2(3-2y^2x)}dy.$$

Тема 5. Дифференциальные уравнения

Вопросы

1. *Дифференциальные уравнения (ДУ). Основные понятия.*
2. *ДУ первого порядка. Задача Коши.*
3. *Уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли.*
4. *Метод Эйлера решения задачи Коши для ДУ первого порядка.*
5. *ДУ высших порядков. Задача Коши.*
6. *ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.*
7. *Линейные ДУ высших порядков.*

8. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами.

9. Системы дифференциальных уравнений.

Контрольные задания

Задание 5.1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.

Варианты

1. $xy' - y = y^2$.
2. $y' - y\sin x = \sin x \cdot \cos x$.
3. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.
4. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$.
5. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.
6. $(x + x^2)y' - (1 + 2x)y = 1 + 2x$.
7. $xdy - ydx = ydy$.
8. $y - xy' = 1 + x^2y'$.
9. $y' - y = xy^2$.
10. $y' - 2xy = 2x\cdot e^{x^2}$.

Задание 5.2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, используя методы понижения порядка.

Варианты

1. $y''y^3 = 1$.
2. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$.
3. $y'' = (1 + (y')^2)^{3/2}$.
4. $x^2y'' + xy' = 1$.
5. $x\cdot\ln x\cdot y'' - y' = 0$.
6. $2yy'' = 1 + (y')^2$.
7. $y''\cdot\mathrm{tg}\, y = 2(y')^2$.
8. $y'' + y'\mathrm{tg}\, x = \sin 2x$.
9. $x^2y'' = (y')^2$.
10. $xy'' - y' = e^x\cdot x^2$.

Задание 5.3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Варианты

1. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
2. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -3\pi/2$.
3. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x} + 12$, $y(0) = y'(0) = 2$.
4. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$, $y(0) = y'(0) = 1/9$.
5. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2/3$.
6. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x + 1$, $y(0) = 3/2$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$, $y(\pi) = -1/3$, $y'(\pi) = 0$.
8. $y'' + y = e^{-x} + 2\cos x$, $y(0) = y'(0) = 1/2$.
9. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.
10. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -11/30$.

Задание 5.4. Найти общее решение системы ДУ и ее частное решение при заданных начальных условиях.

Варианты

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, & x(0) = 5; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, & y(0) = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, & x(0) = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y, & y(0) = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, & x(0) = 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, & x(0) = 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x - 4y, & y(0) = 5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, & x(0) = -1; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, & x(0) = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, & x(0) = 2; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y, & y(0) = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, & x(0) = 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y, & y(0) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, & x(0) = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y, & y(0) = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, & x(0) = 0; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y, & y(0) = -3. \end{cases}$

Методические указания к решению задач по теме "Дифференциальные уравнения"

Пример 5.1. *Найти общее решение ДУ первого порядка:*

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение. *Разделив левую и правую части уравнения на* x, *получаем*

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x \cdot y^2}{x}.$$

Это уравнение Бернулли. Применим подстановку $y = uv$:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} \cdot uv = \frac{\ln x}{x} u^2 v^2;$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\ln x}{x} u^2 v^2. \qquad (*)$$

Функцию v(x) выберем так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках, обращалось в ноль: $v' + \frac{v}{x} = 0.$

Так как последнее есть уравнение с разделяющимися переменными, то имеем: $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ \ln|v| = -\ln|x| \ \Rightarrow\ v = \frac{1}{x}.$

Подставив значение v в уравнение (*), получаем для u(x) уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' = \frac{\ln x}{x} u^2 \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x \cdot dx}{x^2}.$$

Интегрируя это равенство и применяя формулу интегрирования по частям к интегралу, стоящему справа, имеем:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{1 + \ln x - Cx}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = 1/(1 + \ln x - Cx).$$

Пример 5.2. ***Проинтегрировать дифференциальное уравнение***

$$yy'' + y'^2 = 0.$$

Решение. *Это уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$. Оно не содержит независимой переменной x. Если положить $y' = p(y)$, а за новую переменную принять y, то порядок данного уравнения понизится на единицу. Производную y'' находят по правилу дифференцирования сложной функции:* $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} \cdot p.$

Подставляя значения y' и y'' в исходное уравнение, получаем ДУ первого порядка относительно функции p(y) вида

$$ypp' + p^2 = 0 \qquad \text{или} \qquad p(yp' + p) = 0.$$

Пусть $p \neq 0$. Тогда $yp' + p = 0$ или $y\,dp = -p\,dy$. Разделив обе части уравнения на py и проинтегрировав полученное равенство, получим $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y},\ \Rightarrow\ \ln|p| = -\ln|y| + \ln|C_1|,\ \Rightarrow\ p = \frac{C_1}{y}.$

Так как $y' = p$, то $y' = C_1/y \Rightarrow ydy = C_1\,dx$.

Проинтегрировав последнее уравнение, получим общий интеграл исходного уравнения: $y^2/2 = C_1x + C_2$ или $y^2 = 2(C_1x + C_2)$.

В ходе решения мы делили на py, предположив, что $p \neq 0$, $y \neq 0$.

Если же $p = 0$, то $y' = 0 \Rightarrow y = C$. Это решение исходного уравнения может быть получено из общего интеграла при $C_1 = 0$. Частное решение $y = 0$ тоже входит в общий интеграл при $C_1 = C_2 = 0$.

Пример 5.3. *Найти частное решение ДУ* $y'' + y = \cos x + e^x$, *удовлетворяющее начальным условиям:* $y(\pi) = e^{\pi}$, $y'(\pi) = -\pi/2$.

Решение. *Это линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения* $y'' + y = 0$. *Его характеристическое уравнение* $k^2 + 1 = 0$ *имеет корни* $k_1 = i$, $k_2 = -i$.

В этом случае общее решение однородного уравнения имеет вид.

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Так как правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций $f_1(x) + f_2(x)$ *специального вида, то его частное решение* $\tilde{y}$ *ищем в виде* $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$,

где $\tilde{y}_1$ *- частное решение уравнения* $y'' + y = f_1(x) = \cos x$,

а $\tilde{y}_2$ *- частное решение уравнения* $y'' + y = f_2(x) = e^x$.

Вид частных решений $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ *определяем согласно таблице:*

Правая часть $f(x)$ ДУ	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения $\tilde{y}$
$P_n(x)$	Число 0 не явл.корн. характер.уравн. Число 0 - простой корень характ.уравн.	$R_n(x)$ $xR_n(x)$
$Ae^{\alpha x}$	Число α не явл.корн. характерист.уравн. Число α-корень кратности "к" характ.уравнения	$Be^{\alpha x}$ $Bx^k e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	Число α не явл. корн. характерист.уравн. Число α-корень кратности "к" характ.уравнения	$e^{\alpha x}R_n(x)$ $x^k e^{\alpha x}R_n(x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x +$ $+ Q_m(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha \pm i\beta$ не явл. корн.характ.уравн. Числа $\alpha \pm i\beta$ - корни характерист.уравн.	$e^{\alpha x}(R_v(x)\cos\beta x +$ $+ S_v(x)\sin\beta x)$, $v = \max(n, m)$. $xe^{\alpha x}(R_v(x)\cos\beta x +$ $+ S_v(x)\sin\beta x)$

Так как $f_1(x) = \cos x = e^{0\cdot x}\cos(1\cdot x)$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 1$, $Q_m(x) = 0$, $\nu = \max(0, 0) = 0$ и числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения, то $\tilde{y}_1$ ищем в виде

$$\tilde{y}_1 = x(A\cos x + B\sin x).$$

Тогда $\tilde{y}'_1 = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x;$

$$\tilde{y}''_1 = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x.$$

Подставляя эти выражения в уравнение $y'' + y = \cos x$, мы должны получить тождество

$2(B\cos x - A\sin x) \equiv \cos x \Rightarrow B = 1/2$, $A = 0$, т.е. $\tilde{y}_1 = 1/2\, x\sin x$.

Далее, так как $f_2(x) = e^x = 1\cdot e^{1x}$, т.е. $A = 1$, $\alpha = 1$ и число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то $\tilde{y}_2$ ищем в виде $\tilde{y}_2 = Ce^x$. Подставляя это частное решение в уравнение $y'' + y = e^x$, должны получить тождество $2Ce^x \equiv e^x$, откуда $C = 1/2$.

Таким образом, $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 1/2\,(x\sin x + e^x)$, а общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x + 1/2\,(x\sin x + e^x).$$

Найдем теперь частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Продифференцировав общее решение, получим:

$$y' = C_2\cos x + (1/2 - C_1)\sin x + 1/2\,(x\cos x + e^x).$$

Подставляя в выражения для y и y' начальные условия $x = \pi$, $y = e^{\pi}$, $y' = -\pi/2$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -C_1 + \dfrac{1}{2}e^{\pi} = e^{\pi}; \\ -C_2 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{e^{\pi}}{2} = -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \Rightarrow C_2 = -C_1 = \frac{e^{\pi}}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = 1/2\, e^{\pi}(\sin x - \cos x) + 1/2\,(x\sin x + e^x).$$

Пример 5.4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений и ее частное решение при заданных начальных условиях

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \quad x(0) = 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + x, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Сведем систему к уравнению второго порядка относительно функции $x(t)$. Чтобы исключить $y(t)$, продифференцируем по t первое уравнение системы: $\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$.

Отсюда и из первого уравнения системы имеем:

$$y = -\frac{dx}{dt} + 4x, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt}.$$

Подставляем выражения y, dy/dt во второе уравнение системы:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} = 2\left(-\frac{dx}{dt} + 4x\right) + x.$$

Таким образом, для функции $x(t)$ получили уравнение

$$\frac{d^2x}{dt} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет кратный корень $k_{1,2} = 3$. Следовательно, $x(t) = (C_1 + C_2t)e^{3t}$;

$y(t) = -dx/dt + 4x = -3(C_1 + C_2t)e^{3t} - C_2e^{3t} + 4(C_1 + C_2t)e^{3t} =$

$= e^{3t}(-C_2 + C_1 + C_2t)$ *- общее решение исходной системы.*

Найдем также частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Подставляя в общее решение начальные условия $t = 0$, $x = 1$, $y = 0$, получим: $\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 1.$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$x(t) = (1 + t)e^{3t}, \quad y(t) = te^{3t}.$$

Тема 6. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы

Вопросы

1. *Двойной интеграл и его свойства.*
2. *Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах.*
3. *Геометрические приложения двойного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, вычисление объема тела.*
4. *Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.*
5. *Физические приложения двойного интеграла: масса, центр тяжести и моменты инерции.*
6. *Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла.*
7. *Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.*

8. Приложения тройного интеграла: объем тела, масса тела, координаты центра тяжести тела.

9. Криволинейный интеграл первого рода, основные свойства, вычисление.

10. Криволинейный интеграл второго рода, основные свойства и вычисление.

11. Формула Грина.

12. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

13. Приложения криволинейных интегралов: длина дуги, масса дуги, координаты центра тяжести, работа.

14. Поверхностный интеграл первого рода, вычисление.

15. Поверхностные интегралы второго рода, вычисление.

16. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов: площадь поверхности, масса, координаты центра тяжести.

Контрольные задания

Задание 6.1. Изменить порядок интегрирования в интегралах:

Варианты

1. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} f(x,y)dy.$ 2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$ 3. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\frac{1}{3}x}^{x} f(x,y)dy.$

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$ 5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$ 6. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{4}x}^{x} f(x,y)dy.$

7. $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)dx.$ 8. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx.$ 9. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

10. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x,y)dx.$

Задание 6.2. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области, ограниченной линиями.

Варианты

1. $y = x^2 - 1,\ y = 2 - 2x.$
2. $y^2 = 4x,\ x = 2.$
3. $y = x^2 + 4,\ y = -x^2 + 4,\ x = 2$
4. $y = x^2 + 2,\ y = -x^2 + 2,\ x = 3$
5. $y = (x-1)^2,\ y^2 = x - 1$
6. $y = 6/x,\ y = 7 - x.$
7. $y = 0,\ x = 1,\ y = x^3.$
8. $x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = e^x.$
9. $x = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ y = 1/x.$
10. $y^2 = x + 2,\ x = 2$

Задание 6.3. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

Варианты: 1. $z = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

2. $y = x^2$, $z = 1 - y$, $z = 0$.

3. $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

С помощью криволинейного интеграла 1 рода вычислить длину линии L.

Варианты: 4. $L: \begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t; \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

5. L : $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

6. $L: \begin{cases} x = 2a\cos^3 t; \\ y = 2a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$. 7. $L: \begin{cases} x = 6a\cos t; \\ y = 6a\sin t; \\ z = 8at, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

С помощью поверхностного интеграла 1 рода вычислить площадь поверхности S.

Варианты:

8. S: $z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.
9. S: полусферы радиуса R, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2 / 4$.
10. S: $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между $z = 0$ и $z = 1$.

Методические указания к решению задач по теме "Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы"

Пример 6.1. *Изменить порядок интегрирования в интеграле*

$$\Im = \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx.$$

Решение. *Здесь область интегрирования ограничена прямыми $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$, $x = 2y$. На чертеже она представляет трапецию ABCD (см.рис.8).*

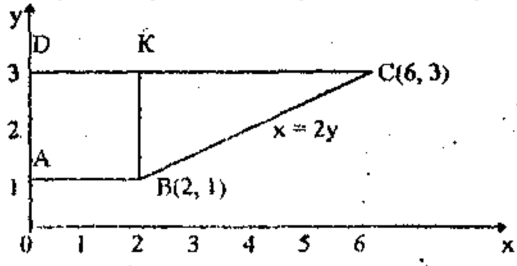


Рис.8

При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область ABCD прямой BK на две части, т.к. нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют различные уравнения: $y = 1$, $y = x/2$.

Вследствие этого интеграл $\Im$ при изменении порядка интегрирования будет равен сумме двух интегралов:

$$\Im = \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx = \int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy + \int_2^6 dx \int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy.$$

***Пример 6.2.** Вычислить площадь плоской области D, ограниченной линиями $y = 2$, $y = x^2 - 1$.*

***Решение.** Область D имеет вид (рис.9).*

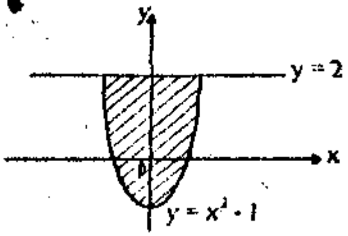


Рис. 9

Область D симметрична относительно оси 0y, поэтому достаточно вычислить площадь правой половины области D и результат удвоить. Согласно формуле для вычисления площади плоской области D на плоскости x0y

$$S = \iint_D dxdy$$

площадь искомой области равна:

$$S = 2\int_{-1}^{2} dy \int_0^{\sqrt{y+1}} dx = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{y+1}\, dy = 2\int_{-1}^{2} (y+1)^{\frac{1}{2}} d(y+1) = 4\sqrt{3}.$$

***Пример 6.3.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, $z = 0$, $z = 3$.*

***Решение.** Для вычисления объема тела воспользуемся формулой*

$$V = \iiint_T dxdydz.$$

Тело T имеет вид (см.рис.10).

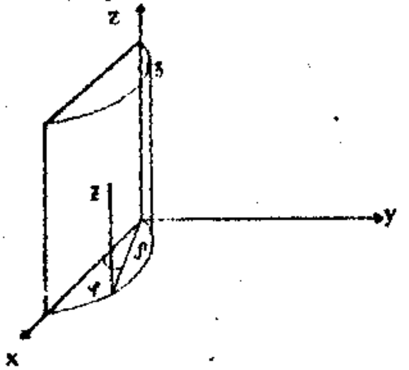


Рис.10

Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности $x^2 + y^2 = 2x$ в цилиндрических координатах имеет вид $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$ или $\rho = 2\cos\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi/2$ (см.рис.11).

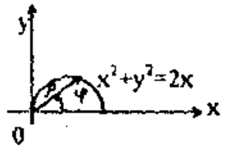


Рис.11

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_T \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_0^3 dz = 3\int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^{2\cos\varphi} \right] d\varphi =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = 6\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}.$$

***Пример 6.4.** Вычислить длину дуги одной арки циклоиды*

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

***Решение.** Длина дуги плоской линии, заданной параметрически, вычисляется с помощью криволинейного интеграла по формуле*

$$L = \int\limits_L dl, \qquad dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}\, dt$$

Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды:

$$dx/dt = a(1 - \cos t); \quad dy/dt = a\sin t.$$

Параметр t меняется от $t = 0$ до $t = 2\pi$. Следовательно, имеем

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

***Пример 6.5.** Вычислить площадь части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ (рис.12).*

***Решение.** Площадь поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, находят по формуле*

$$S = \iint_S ds = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$$

Из уравнения параболоида находим: $z = (x^2 + y^2)/2$; $\partial z/\partial x = x$; $\partial z/\partial y = y$. Область D_{xoy} есть круг $x^2 + y^2 \le 1$.

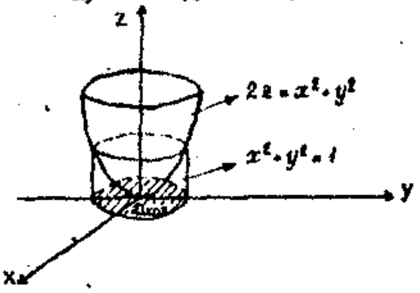


Рис.12

$$S = \iint_{D_{xoy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+\rho^2)^{1/2}\, d(1+\rho^2) = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi.$$

Тема 7. Векторный анализ

Вопросы

1. *Скалярное поле, линии уровня, поверхности уровня. Производная по направлению.*
2. *Градиент скалярного поля.*
3. *Векторное поле. Векторные линии, векторные трубки. Поток векторного поля через поверхность.*
4. *Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского.*
5. *Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.*
6. *Ротор векторного поля, теорема Стокса.*
7. *Потенциальные и соленоидальные векторные поля.*
8. *Оператор Гамильтона, его использование в векторном анализе.*

Контрольные задания

Задание 7.1

1. Дано скалярное поле $u = 4x^3 - 3y^3$ и точки M(1;1;0) и N(4;5;0). Найти производную поля u в точке M по направлению, идущему к точке N.
2. Дано скалярное поле $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ и точки M(0;0;0) и N(3;4;0). Найти производную поля u в точке M по направлению, идущему к точке N.
3. Дано скалярное поле $u = xy + yz + 1$ и точки M(0;2;4) и N(12;-5;-8). Найти производную поля u в точке M по направлению, идущему к точке N.
4. Дано скалярное поле $u = xy + yz + xz$ и точки M(2;1;3) и N(5;5;15). Найти производную поля u в точке M по направлению, идущему к точке N.
5. Дано скалярное поле $u = x^2 - y^2 + z^2$ и точки M(0;1;2) и N(0;3;6). Найти производную поля u в точке M по направлению, идущему к точке N.
6. Дано скалярное поле $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ и точка M(1;-1;2). Найти градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля.
7. Дано скалярное поле $u = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ и точка M(1;-1;2). Найти градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля.
8. Дано скалярное поле $u = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ и точка M(1;2;0). Найти градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля.

9. Дано скалярное поле $u = xyz$ и точка M(1;2;-2).
   Найти градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля.
10. Дано скалярное поле $u = 3x^2 + y^2 + z^2$ и точка M(1;0;-1).
   Найти градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля.

Задание 7.2

1. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (8x + 1)\bar{i} + (zx - 4y)\bar{j} + (e^x - z)\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$.
2. Найти поток векторного поля $\bar{a} = 8x\bar{i} + 11y\bar{j} + 17z\bar{k}$ через внешнюю сторону пирамиды с вершинами в точках 0(0; 0; 0), A(1; 0; 0), B(0; 1/2; 0), C(0; 0; 1/3).
3. Найти поток векторного поля $\bar{a} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} + zx^2\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + z^2\bar{j}$ через внешнюю сторону поверхности тела, расположенного в I октанте и ограниченного координатными плоскостями и поверхностью $z^2 = 1 - x - y$.
5. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в I октанте ($\cos\gamma > 0$).
6. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = -x^2y\bar{i} + xy^2\bar{j}$ вдоль кривой L: $x^2 + y^2 = a^2$ (в положительном направлении) по формуле Грина.
7. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ вдоль кривой

   L: $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t \end{cases}$ (в положительном направлении).
8. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z\bar{k}$ вдоль кривой L, получающейся при пересечении поверхности $(y + z)^2 = 4 - x$ с координатными плоскостями, по формуле Стокса.
9. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = -x^2y^3\bar{i} + 4\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль

   кривой L: $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 2\sin t; \\ z = 4. \end{cases}$
10. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + a\bar{k}$ (a = const) вдоль кривой L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (в положительном направлении) по формуле Стокса.

Задание 7.3. Показать, что векторное поле $\bar{a}$ потенциальное, и найти его потенциал.

Варианты

1. $\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$.
2. $\bar{a} = x\ln(1 + y^2)\bar{i} + (yx^2)/(1 + y^2)\bar{j}$.
3. $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$.
4. $\bar{a} = 2xy\bar{i} + (x^2 - 2yz)\bar{j} - y^2\bar{k}$.
5. $\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2xz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$.
6. $\bar{a} = (3y^2 + 2xy + 9y)\bar{i} + (9x + x^2 + 6xy)\bar{j}$.
7. $\bar{a} = 2x(y^2 - 2x^2)\bar{i} + 2y(x^2 - 2y^2)\bar{j}$.
8. $\bar{a} = -x^2\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$.
9. $\bar{a} = -y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$.
10. $\bar{a} = (5x + 2yz)\bar{i} + (-3y + 2xz)\bar{j} + (-2z + 2xy)\bar{k}$.

Методические указания к решению задач по теме "Векторный анализ"

Пример 7.1. *Найти градиент скалярного поля $u = x^y - z$ и наибольшую скорость его возрастания в точке $M(2; 2; 4)$.*

Решение. *Градиент скалярного поля определяется по формуле*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля в данной точке определяется по формуле $\max\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u|$.

В нашем случае

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.yx^{y-1}\right|_{M_0} = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.x^y \ln x\right|_{M_0} = 4\ln 2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1.$$

Поэтому $\operatorname{grad} u(M_o) = 4\vec{i} + 4\ln 2\vec{j} - \vec{k}$, *а искомая наибольшая скорость возрастания поля*

$$\max\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(M_o)| = \sqrt{4^2 + (4\ln 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17 + 16\ln^2 2}\,;$$

Пример 7.2. *Найти поток векторного поля* $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$ *через внешнюю сторону замкнутой поверхности* S : $\{x^2 + y^2 = 9;\ z = 0;\ z = y\ (z \geq 0)\}$.

Решение. *Для вычисления потока через внешнюю сторону замкнутой поверхности* S, *ограничивающей объем* V, *удобно применять теорему Остроградского*

$$\iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n})ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dv.$$

Так как $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} = 1;\ \dfrac{\partial a_y}{\partial y} = 1;\ \dfrac{\partial a_z}{\partial z} = 0$, *то* $\operatorname{div}\vec{a} = 1 + 1 + 0 = 2$,

а поток векторного поля $\qquad \prod = 2\iiint\limits_V dv.$

Здесь V *-тело, ограниченное поверхностью* S.

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда

$$\prod = 2\iiint\limits_V dv = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{3}\rho\, d\rho\int\limits_0^{\rho\sin\varphi} dz = 2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{3}\rho^2\, d\rho =$$

$$= -2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 = 4\cdot\frac{27}{3} = 36.$$

Пример 7.3. *Дано векторное поле* $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} - z^3\vec{k}$.
Показать, что поле потенциальное, и найти его потенциал.

Решение. Найдем $\operatorname{rot}\bar{a}$ *по формуле*

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

В нашем случае $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = -z^3$.
Поэтому

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y^2 & -z^3 \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(-z^3)}{\partial y}-\frac{\partial y^2}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial(-z^3)}{\partial x}\right)\bar{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial y^2}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\bar{k}=0\ .$$

Следовательно, поле потенциальное.
Потенциал поля найдем по формуле

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C,$$

выбрав в качестве точки (x_0, y_0, z_0) *точку* $(0, 0, 0)$.
Тогда

$$u(x,y,z)=\int_0^x x\,dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(-z^3)dz+C=\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}+C.$$

Таким образом, функция $u(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+C$ *является потенциалом поля* $\bar{a}$.

Действительно, $\operatorname{grad} u = x\bar{i} + y^2\bar{j} - z^3\bar{k} = \bar{a}$.

Тема 8. Ряды.

Вопросы

1. *Числовые ряды. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Действия над сходящимися рядами.*
2. *Знакопостоянные ряды. Достаточные признаки сходимости.*
3. *Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда.*
4. *Ряды с комплексными членами.*
5. *Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов.*
6. *Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус, интервал и круг сходимости степенного ряда.*
7. *Ряды Тейлора и Маклорена, их приложения.*
8. *Тригонометрические ряды Фурье. Сходимость тригонометрических рядов Фурье.*

Контрольные задания

V Задание 8.1. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд.

Варианты

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. 8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^2 tg^4\frac{\pi}{n}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}$.

V Задание 8.2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

Варианты

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^n$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\ln\sqrt{2n+1}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-2}{2n+1}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^3}$. 6. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n!}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n(n+2)}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^n(2n+1)}$.

Задание 8.3. Найти область сходимости степенного ряда.

Варианты

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{3^n(n+1)}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n x^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n x^n}{\sqrt{n}}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)(x-1)^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^3}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^n}}{n!}x^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n+2)(x-2)^n}{n!}$.

Задание 8.4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном промежутке и исследовать его на сходимость.

Варианты

1. $f(x) = 4x - 3,\ -5 \le x < 5.$ 2. $f(x) = |x|,\ -2 \le x < 2.$

3. $f(x) = \begin{cases} -3, & -2 < x < 0; \\ 1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 < x \le 0; \\ -1, & 0 < x \le 2. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & -\pi \le x < 0; \\ e^x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$ 6. $f(x) = \begin{cases} -1/2, & -6 \le x \le 0; \\ 1, & 0 < x < 6. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \le x < 0; \\ 2-x, & 0 \le x < 2. \end{cases}$ 8. $f(x) = x^2,\ -\pi < x \le \pi.$

9. $f(x) = 3 - |x|,\ -5 < x \le 5.$ 10. $f(x) = 2x - 3,\ -3 < x \le 3.$

Методические указания к решению задач по теме "Ряды"

Пример 8.1. Исследовать на сходимость числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$.

Решение. Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \ge 0$, *на сходимость следует применить какой-либо из достаточных признаков сходимости числовых знакоположительных рядов. Применим признак Даламбера.*

$$u_n = \frac{n^2}{e^n},\quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot e^n}{e^{n+1} \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Отсюда, согласно признаку Даламбера, следует, что данный ряд сходится.

Пример 8.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ln(n+1)}.$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся.

Проверим выполнение условий теоремы Лейбница, согласно которой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *сходится, если выполняются условия:* 1) $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in N$; 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

В нашем случае $u_n = \frac{1}{ln(n+1)}$, $u_{n+1} = \frac{1}{ln(n+2)}$.

Выполнение первого условия следует из неравенства

$$\frac{1}{ln(n+1)} > \frac{1}{ln(n+2)}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n+1)} = 0$, *то выполнено и второе условие теоремы Лейбница и, следовательно, исходный знакочередующийся ряд сходится.*

Чтобы выяснить, является ли эта сходимость абсолютной или условной, исследуем на сходимость соответствующий ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$.

Так как $\quad ln(n+1) < n+1$, $\quad$ *то* $\frac{1}{ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$.

Но поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ *есть гармонический ряд и он расходится,*

то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$ *также расходится.*

Таким образом, исходный ряд сходится условно.

Пример 8.3. *Найти область сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}.$$

Решение. *Радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(x-x_o)^n$

находим по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

где a_n, a_{n+1} *- коэффициенты* n *- го и* $(n+1)$ *- го членов ряда соответственно.*

Имеем $a_n = 1/(n\cdot 2^n)$, $a_{n+1} = 1/(n+1)2^{n+1}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}\right| = 2\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 2.$$

Так как $x_0 = -2$, $x_0 - R = -4$, $x_0 + R = 0$, *то данный ряд сходится при* $x\in(-4, 0)$ *и расходится при* $x\in(-\infty, -4)\cup(0, +\infty)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т.е. в точках $x = -4$, $x = 0$.

При $x = -4$ *получим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, *который сходится*

условно, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, *и члены ряда монотонно убывают. Следовательно, точку* $x = -4$ *включаем в интервал сходимости ряда.*

При $x = 0$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *который расходится, поскольку является гармоническим. Следовательно, точка $x = 0$ не входит в интервал сходимости ряда.*

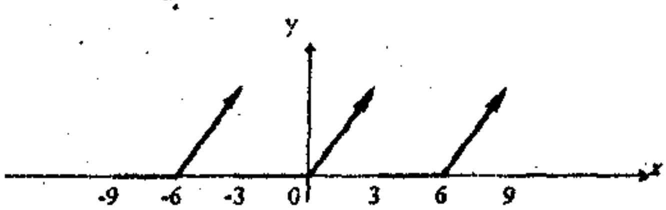
Таким образом, окончательно получаем, что исходный ряд сходится при $x \in [-4, 0)$ и расходится при $x \in (-\infty, -4) \cup [0, +\infty)$.

Пример 8.4. *Разложить в ряд Фурье функцию*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x < 0; \\ x, & 0 \le x < 3 \end{cases}$$

и исследовать его на сходимость.

Решение. *Продолжим определение функции $f(x)$ на всю числовую ось "периодическим образом", т.е. так, чтобы $f(x) = f(x + 6)$ для $\forall x \in R$.*



Так как $f(x)$ кусочно-гладкая на отрезке $[-3, 3]$, то она разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right),$$

где l - полупериод функции.

Коэффициенты ряда определяются по формулам:

$$a_o = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right)dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot x\right)dx.$$

В рассматриваемом примере $l = 3$.

Следовательно.

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos\frac{\pi n x}{3}dx, \\ du = dx, & v = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \sin\frac{\pi n x}{3}\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - 1) = \frac{3}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi^2 n^2}, & \text{если } n - \text{нечётное}; \\ 0, & \text{если } n - \text{чётное}. \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} x\sin\frac{\pi n x}{3}dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin\frac{\pi n x}{3}dx, \\ du = dx, & v = \frac{-3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{3x}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 3}{\pi n}\cos\pi n +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{\pi n}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 = -\frac{3}{\pi n}\cdot\cos\pi n = -\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{3}\right)}{(2n-1)^2} - \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

Этот ряд сходится к значениям исходной функции ***f(x) в точках непрерывности, т.е. при*** $x \in (-3, 3)$.

В точке $x = -3$ сумма ряда $S(x)$ определяется по формуле

$$S(-3) = \frac{f(-3-0)+f(-3+0)}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тема 9. Теория функций комплексного переменного

Вопросы:

1. *Функция комплексного переменного (ФКП), ее предел, непрерывность.*
2. *Элементарные функции комплексного переменного.*
3. *Производная ФКП. Условия Коши-Римана.*
4. *Геометрический смысл модуля и аргумента производной.*
5. *Гармонические функции, их связь с аналитическими функциями.*
6. *Понятие конформного отображения. Простейшие конформные отображения.*
7. *Интегрирование функции комплексного переменного.*
8. *Теорема Коши.*
9. *Интегральная формула Коши.*
10. *Понятие о рядах Тейлора и Лорана.*

Контрольные задания

Задание 9.1. Представить заданную функцию $w = f(z)$, где $z = x \pm iy$, в виде $w = u(x, y) + i\,v(x, y)$; проверить, является ли она аналитической в некоторой области. Если да, то найти $f'(z)$ в этой области.

Варианты

1. $w = z^3 + 3z - i$. 2. $w = z^3 + z^2 + i$. 3. $w = i(1 - z^2) - 2z$.

4. $w = 2z^2 - iz$. 5. $w = 1/7z$. 6. $w = z\,\mathrm{Re}\,z$.

7. $w = e^{1-2z}$. 8. $w = e^{1-2iz}$. 9. $w = z\,e^{z}$.

10. $w = \cos 7z$.

Задание 9.2. Пользуясь теоремой Коши и интегральными формулами Коши, вычислить заданный интеграл.

Варианты

1. $\int\limits_L \frac{t^3}{t-2i}dt;\quad L: |t|=3;\ |t|=1.$
2. $\int\limits_L \frac{\sin t}{t+i}dt;\quad |t+i|=2.$
3. $\int\limits_L \frac{dt}{t^2+1};\quad |t|=2.$
4. $\int\limits_L \frac{e^t}{t^2-1}dt;\quad |t|=2.$
5. $\int\limits_L \frac{\cos t}{t^2-\pi^2}dt;\ |t|=4.$
6. $\int\limits_L \frac{dt}{(1+t)(t-1)^3};\quad |t+1|=1$
7. $\int\limits_L \frac{\cos t}{(t-1)^3}dt;\ |t-i|=1.$
8. $\int\limits_L \frac{\sin t}{(t+i)^3}dt;\quad |t+i|=1.$
9. $\int\limits_L \frac{t^2}{t-2i}dt;\quad |t|=1;\ |t|=4.$
10. $\int\limits_L \frac{dt}{t^2+2t};\quad |t|=3.$

Методические указания к решению задач по теме "Теория функций комплексного переменного"

Пример 9.1. *Представить функции $w=\sin z$ и $w=\bar z$ в виде $w=u(x,y)+iv(x,y)$; проверить, являются ли они аналитическими в некоторой области. В случае положительного ответа найти их производные.*

Решение. а) $w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\sin iy\cos x=$

$$=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\,\mathrm{sh}\,y\cos x\ \Rightarrow\ u(x,y)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y;\quad v(x,y)=\mathrm{sh}\,y\cos x.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\partial u/\partial x=\cos x\,\mathrm{ch}\,y;\qquad \partial v/\partial x=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y;$$
$$\partial u/\partial y=\sin x\,\mathrm{sh}\,y;\qquad \partial v/\partial y=\cos x\,\mathrm{ch}\,y.$$

Условия Коши-Римана выполняются во всей комплексной плоскости, и функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы. Следовательно, функция $w=\sin z$ является аналитической для всех z.

$$f'(z)=(\sin z)'=\partial u/\partial x+i\partial v/\partial x=\cos z.$$

б) $w=\bar z=x-iy\ \Rightarrow\ u(x,y)=x;\ v(x,y)=-y.$

$$\partial u/\partial x = 1; \qquad \partial v/\partial x = 0;$$
$$\partial u/\partial y = 0; \qquad \partial v/\partial y = -1.$$

Условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке z. Значит, функция $w = \bar{z}$ не будет аналитической ни в какой области.

Пример 9.2. *Вычислить интеграл* $\int\limits_L \frac{t}{t^2+9}dt$, *если:*

1) *точка $z = 3i$ лежит внутри контура L, а точка $z = -3i$ - вне L;*
2) *точки $z = \pm 3i$ лежат внутри контура L;*
3) *точки $z = \pm 3i$ лежат вне контура L.*

Решение. *1). Так как $t^2 + 9 = (t + 3i)(t - 3i)$, то*

$$\int\limits_L \frac{t}{t^2+9}dt = \int\limits_L \frac{\frac{t}{t+3i}}{t-3i}dt.$$

Функция $f(z) = \dfrac{z}{z+3i}$ - аналитическая внутри контура L.

Поэтому, применяя интегральную формулу Коши к интегралу $\int\limits_L \frac{f(t)}{t-3i}dt$, *получим* $\int\limits_L \frac{t}{t^2+9}dt = 2\pi i\,\frac{3i}{3i+3i} = \pi i.$

2). Точки $z = \pm 3i$ лежат внутри контура L.

Тогда

$$\int\limits_L \frac{t}{t^2+9}dt = \int\limits_L \frac{t}{(t+3i)(t-3i)}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{dt}{t+3i} + \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{dt}{t-3i} = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i.$$

Здесь к каждому из интегралов применена формула Коши.

3). В этом случае функция $f(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$ является аналитической внутри контура L.

Следовательно, $\int\limits_L \frac{t}{t^2+9}dt = 0.$

Тема 10. Операционное исчисление

Вопросы

1. Оригинал и изображение. Оператор Лапласа.
2. Теорема о существовании изображения.
3. Изображение простейших оригиналов: e^{at}, $sin(wt)$, $cos(wt)$, $sh(wt)$, $ch(wt)$, t^n.
4. Линейность преобразования Лапласа.
5. Теорема подобия.
6. Теорема смещения.
7. Теорема запаздывания.
8. Дифференцирование оригинала.
9. Дифференцирование изображения.
10. Интегрирование оригинала.
11. Интегрирование изображения.
12. Свертка функций. Теорема Бореля.
13. Интеграл Дюамеля.
*14. Решение дифференциальных уравнений и систем **операционным** методом.*

Контрольные задания

Задание 10.1. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Варианты

1. $x'' - x = 4\sin t + 5\cos t$; $\quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$
2. $x'' + 2x' + x = 3e^t$; $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
3. $x''' - 4x' = 2$; $\quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
4. $x'' + x = e^{-t} + 2$; $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$
5. $x'' - x' - 6x = 2$; $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$
6. $x'' - x' = t^2$; $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$
7. $x''' - x'' - 6x' = 0$; $\quad x(0) = 15, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 56.$
8. $x'' - x' - 2x = 4e^{3t}$; $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$
9. $x''' - x' = \cos t$; $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$
10. $x'' + x = t\cos 2t$; $\quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

Задание 10.2. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям.

В а р и а н т ы

1. $\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, & x(0)=0; \\ y'+x+2y=\sin t, & y(0)=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=3x+4y, & x(0)=1; \\ y'=4x-3y, & y(0)=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'=-x+y+z, & x(0)=2; \\ y'=x-y+z, & y(0)=2; \\ z'=x+y+z, & z(0)=-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'-y-z=0, & x(0)=1; \\ y'-3x-z=0, & y(0)=0; \\ z'-3x-y=0, & z(0)=-1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y'+5y-2x=e^{t}, & x(0)=0; \\ x'-y+6x=e^{-2t}, & y(0)=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=y, & x(0)=0; \\ y'=-x+e^{t}+e^{-t}, & y(0)=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'+3y+x=0, & x(0)=1; \\ x'-y+x=0, & y(0)=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'+7x-y=0, & x(0)=1; \\ y'+2x+5y=0, & y(0)=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'=x+2y, & x(0)=0; \\ y'=2x+y+1, & y(0)=5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'-y+x=\dfrac{3}{2}t^{2}, & x(0)=0; \\ x'+4y+2x=4t+1, & y(0)=0. \end{cases}$

Методические указания к решению задач по теме "Операционное исчисление"

Таблица изображений основных элементарных функций.

N	f(t)	F(p)	N	f(t)	F(p)
1.	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	7.	ch βt	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
2.	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	8.	sh βt	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
3.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	9.	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4.	$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10.	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5.	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	11.	$e^{\alpha t}$ ch βt	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
6.	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	12.	$e^{\alpha t}$ sh βt	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$

Пример 10.1. Методом операционного исчисления найти частное

решение дифференциального уравнения $4x'''-8x''+x'+3x=-8e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=x''(0)=1$.

Решение. *Пусть $x(t) \doteq X(P)$.*

Тогда $x'(t) \doteq pX(p)-x(0)=pX(p)-1$,

$x''(t) \doteq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-1$;

$x'''(t) \doteq p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p)-p^2-p-1$.

Так как $e^t \doteq 1/(p-1)$, то, переходя к операторному уравнению, получим

$4(p^3X(p)-p^2-p-1)-8(p^2X(p)-p-1)+pX(p)-1+3X(p)=-8\cdot 1/(p-1)$

или

$$X(p)(4p^3-8p^2+p+3)=-8/(p-1)+4p^2-4p-3 \Rightarrow$$

$$X(p)=-\frac{8}{(p-1)(4p^3-8p^2+p+3)}+\frac{4p^2-4p-3}{4p^3-8p^2+p+3}=$$

$$=-\frac{2}{(p-1)^2(p-\frac{3}{2})(p+\frac{1}{2})}+\frac{1}{p-1}.$$

Разложим первое слагаемое на простейшие дроби:

$$-\frac{2}{(p-1)^2\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{A_2}{(p-1)^2}+\frac{A_3}{p-\frac{3}{2}}+\frac{A_4}{p+\frac{1}{2}}.$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 получим систему

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + A_4 = 0; \\ -2A_1 + A_2 - \frac{3}{2}A_3 - \frac{7}{2}A_4 = 0; \\ \frac{1}{4}A_1 - A_2 + 4A_4 = 0; \\ \frac{3}{4}A_1 - \frac{3}{4}A_2 + \frac{1}{2}A_3 - \frac{3}{2}A_4 = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем, что $A_1=\frac{32}{9}, A_2=\frac{8}{3}, A_3=-4, A_4=\frac{4}{9}$.

Следовательно, $X(P)=\frac{41}{9}\frac{1}{p-1}+\frac{8}{3}\frac{2}{(p-1)^2}-\frac{4}{p-\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$.

Переходя к оригиналам, окончательно имеем

$$x(t)=41/9\,e^t+8/3\,te^t-4e^{3/2\,t}+4/9\,e^{-1/2\,t}.$$

Пример 10.2. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z; \\ y' = -2x + y - 2z; \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1$, $y(0)=2$, $z(0)= -1$.

Решение. Пусть $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$, $z(t) \div Z(p)$.

Тогда $x'(t) \div pX(p)-1$, $y'(t) \div pY(p) - 2$, $z'(t) \div pZ(p) + 1$.

Переходя к изображениям, получаем операторную систему

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -2X(p) - 2Y(p) - 4Z(p), \\ pY(p) - 2 = -2X(p) + Y(p) - 2Z(p), \\ pZ(p) + 1 = 5X(p) + 2Y(p) + 7Z(p) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p+2)X(p) + 2Y(p) + 4Z(p) = 1, \\ 2X(p) + (p-1)Y(p) + 2Z(p) = 2, \\ 5X(p) + 2Y(p) - (p-7)Z(p) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(p) = \frac{p-5}{(p-1)(p-2)} = \frac{4}{p-1} - \frac{3}{p-2}; \quad Y(p) = \frac{2}{p-1};$$

$$Z(p) = -\frac{p-5}{(p-1)(p-2)} = -\frac{4}{p-1} + \frac{3}{p-2}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим решение системы

$$x(t) = 4e^{t} - 3e^{2t}, \; y(t) = 2e^{t}, \; z(t) = -4e^{t} + 3e^{2t}.$$

Тема 11. Уравнения математической физики

Вопросы

1. *Предмет математической физики. Дифференциальное уравнение в частных производных, его порядок. Общее решение.*
2. *Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка и их классификация.*
3. *Постановка основных краевых задач для линейных дифференциаль -*

ных уравнений в частных производных второго порядка.

4. Уравнение колебаний струны.

5. Уравнение теплопроводности.

6 Метод Даламбера.

7. Метод Фурье.

Контрольные задания

Задание 11.1. Методом Даламбера найти уравнение $u = u(x, t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\partial^2u/\partial t^2 = a^2\,\partial^2u/\partial x^2$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ форма струны и скорость струны с абсциссой x определяются соответственно заданными функциями:

$$u\big|_{t_0=0} = f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t_0=0} = F(x);\ a = 1.$$

Варианты

1. $f(x) = x(x-2)$; $F(x) = e^{x}$.	2. $f(x) = x^2$; $F(x) = \sin x$.
3. $f(x) = e^{-x}$; $F(x) = v_0$.	4. $f(x) = \cos x$; $F(x) = \sin x$.
5. $f(x) = x(2-x)$; $F(x) = e^{-x}$.	6. $f(x) = x$; $F(x) = \cos x$.
7. $f(x) = \sin x$; $F(x) = v_0$.	8. $f(x) = e^{x}$; $F(x) = wx$.
9. $f(x) = x^{2}+1$; $F(x) = 2$.	10. $f(x) = \cos x$; $F(x) = wx$.

Задание 11.2. Методом Фурье найти уравнение $u = u(x, t)$ формы однородной струны, определяемой уравнением $\partial^2u/\partial t^2 = a^2\,\partial^2u/\partial x^2$, если струна закреплена на концах $x = 0$, $x = l$. Форма струны и скорость струны с абсциссой x в начальный момент времени $t_0 = 0$ определяются соответственно заданными функциями:

$$u\big|_{t_0=0} = f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t_0=0} = F(x);\ a = 1.$$

$$1.\ f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & x\in[0;2[;\\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x, & x\in[2;5],\end{cases}\qquad F(x)=0.$$

$$2.\ f(x)=0;\qquad F(x)=\begin{cases}x; & x\in[0;5[,\\ 3x-10; & x\in[5;8[.\end{cases}$$

$$3.\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x; & x\in[0;2[;\\ 3-x, & x\in[2;3],\end{cases}\qquad F(x)=0.$$

$$4.\ f(x)=0;\qquad F(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0;1[;\\ 1, & x\in[1;6[.\end{cases}$$

$$5.\ f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x,\quad x\in[0;4],\quad F(x)=2x;\ x\in[0;4[.$$

Методом Фурье определить функцию $u = u(x, t)$ распределения температуры в тонком однородном изолированном стержне длины l, начальная температура которого равна $f(x)$, а на концах стержня поддерживается температура, равная нулю.

$$6.\ f(x)=\frac{2}{9}x(3-x);\ x\in[0;3];\ l=3.\quad 7.\ f(x)=\frac{3}{4}x(2-x);\ x\in[0;2];\ l=2.$$

$$8.\ f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<2;\\ 4-x, & 2\le x\le 4,\end{cases}\quad l=4.\quad 9.\ f(x)=\begin{cases}\frac{2}{15}x, & 0\le x<3;\\ 1-\frac{x}{5}, & 3\le x\le 5,\end{cases}\quad l=5.$$

$$10.\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{5}, & 0\le x<\frac{1}{2};\\ \frac{1-x}{5}, & \frac{1}{2}\le x\le 1,\end{cases}\quad l=1.$$

Методические указания к решению задач по теме "Уравнения математической физики"

Пример 11.1. Методом Даламбера найти уравнение $u=u(x,t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\partial^2u/\partial t^2 = a^2\,\partial^2u/\partial x^2$, *если в начальный момент времени $t_0=0$ форма* струны определяется функцией $u(x,0) = \sin x$, а ее начальная скорость $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_0=0} = \cos x$; $a = 1$.

Решение. Уравнение колебаний струны определяется по формуле Даламбера: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\tau)d\tau.$

В нашем случае $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$, $a = 1$. Поэтому искомая функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t) + \int\limits_{x-at}^{x+at} \cos\tau d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t) + \sin(x+t) - \sin(x-t)\right] = \sin(x+t).$$

Пример 11.2. Методом Фурье найти уравнение $u = u(x,t)$ формы однородной струны, определяемой уравнением $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2 \partial^2 u/\partial x^2$, если струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. Форма струны и скорость струны с абсциссой x в начальный момент времени $t_0 = 0$ определяется функциями

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; \\ -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}; & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]; \end{cases} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение. Обратимся к формуле Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx; \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l F(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Вычислим коэффициенты a_k и b_k.

$$a_k = 2\left(\int\limits_0^{1/2} \frac{2}{5}x\sin k\pi x dx + \int\limits_{1/2}^1 \left(-\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right)\sin k\pi x dx\right) =$$

$$= \frac{4}{5}\left(\int\limits_0^{1/2} x\sin k\pi x dx - \int\limits_{1/2}^1 x\sin k\pi x dx + \int\limits_{1/2}^1 \sin k\pi x dx\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найдем, что

$$\int x\sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi}\int x d(\cos k\pi x) = -x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\int \cos k\pi x dx =$$

$$= -x\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}.$$

$$\int \sin k\pi x dx = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi},$$

Подставив эти выражения неопределенных интегралов в формулу для коэффициентов a_k, *получим*

$$a_k = \frac{8}{5k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ \frac{8}{5k^2\pi^2}(-1)^m, & k = 2m+1. \end{cases}$$

Все $b_k - 0$, *т.к.* $F(x) = 0$.

Окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{8}{5\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\pi x\cdot\cos(2m+1)\pi t.$$

Пример 11.3. *Методом Фурье определить функцию* $u = u(x,t)$ *распределения температуры в тонком однородном изолированном стержне длины* $l = 1$, *начальная температура которого равна* $u(x, 0) = 5x(1-x)$, *а на концах стержня поддерживается нулевая температура.*

Решение. *По формуле Фурье*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}; \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

В нашем случае $b_k = 10\int_0^1 (x-x^2)\sin k\pi x dx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим, что

Тогда

$$b_k = -\frac{20}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ \frac{40}{(2m-1)^3\pi^3}, & k = 2m-1. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{40}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\pi x}{(2m-1)^3} e^{-(2m-1)^2\pi^2 a^2 t}.$$

Тема_1_2 . Теория вероятностей н математическая статистике

Вопросы

1. *Основные задачи теории вероятностей.*
2. *Пространство элементарных событий. Классификация событий.*
3. *Относительная частота и ее свойства.*
4. *Вероятность события. Аксиомы теории вероятностей.*
5. *Методы задания вероятностей.*
6. *Классическое определение вероятностей. Перестановки, сочетания, размещения.*
7. *Теорема сложения вероятностей и ее следствия.*
8. *Условная вероятность^ теорема умножения вероятностей.*
9. *Формула полной вероятности.*
10. *Формулы Бейеса.*
11. *Случайные величины (СВ). Закон распределения вероятностей дискретной СВ.*
12. *Функция распределения и ее свойства. Вычисление вероятности попадания СВ в заданный полуинтервал с помощью функции распределения.*
13. *Плотность вероятности непрерывной СВ и ее свойства, Вероят - постный смысл плотности вероятностей. Выраакение вероятнос- ти попадания непрерывной СВ в заданный интервал через ее томность.*
14. *Математическое ожидание СВ. его смысл и свойства.*
15. *Дисперсия и среонее квадратичное отклонение* G& *и их свойства.*
16. *Повторные испытания. Формула Бернулли. Биномиальное распре - деление и его числовые характеристики.*
17. *Распределение Пуассона и его числовые характеристики.*
18. *Непрерывные распределения {равномерное, экспоненциальное) и их числовые характеристики.*
19. *Нормальное распределение. Параметры нормального распределе - ния. Нормированное нормальное распределение и $е_{го}$ свойства.*
20. *Кривая Гаусса и ее свойства.*
21. *Вероятность попадания в заданный интервал нормально распре - деленной СВ. Вероятность отклонения нормально распределенной СВ от ее математического ожидания. Правило >прех сигм.*
22. *Закон распределения вероятностей дискретной двумерной СВ.*
23. *Функция распределения двумерной СВ и ее свойства. Вычисление вероятности попадания двумерной СВ* е *прямоугольник с помощью функции распределения.*

24. Плотность вероятности двумерной СВ, ее вероятностный смысл и свойства.

25. Выражение вероятности попадания двумерной СВ в прямоугольник и произвольную область с помощью плотности вероятностей.

26. Числовые характеристики двумерных СВ (математические ожи - дания и дисперсии составляющих) и их свойства.

27. Ковариация, коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость составляющих двумерной случайной величины (СИ).

28. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

29. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

30. Предмет и задачи математической статистики. Генеральная со - вокупность и выборка.

31. Графические методы изображения статистических рядов (полигон, гиспюгралша).

32. Эмпирическая функция распределения, ее свойства и график.

Контрольные шлинин

Заданно 12.1

I. Рабочий обслуживает три станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует ремонта, равна 0,9. Для второго и третьего станков эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,7. Требуется: I) записать пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей элементарный событий; 3) найти вероятности того, что в течение часа:
а) ровно 2 станка потребуют ремонта; б) не более двух станков потребуют ремонта.

. 2. На четырех карточках написаны буквы II, Я, Т, Ь. Карточки тщательно перемешивают и кладут последовательно радом. Требуется: 1) записан, пространство элементарных событий, 2) записать распределение вероятностей элементарных событий; 3) найти вероятность тою, что: а) первые две буквы согласные; 6) получится слово "ПЯТЬ".

3. Монета подбрасывается до тех пор, пока не появится герб. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей; 3) найти вероятность того, что: а) герб выпадет впервые при четвергом броске монеты, б) герб выпадет при четырех подбрасываниях.

1 Из четырех орудий произвели залп но цели. Вероятность попадания « цель для каждого орудия равна 0,6, Требуется: 1) записать пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей элементарных событий: 3) найти вероятность тою, что:

*

а) два снаряда пошит в цель; б) не м^нее грех снарядов попало в цель.

5. В семье трос детей, Считая вероятность рождения мальчика и девочки одинаковой, iребуется: I) записать пространство элементарных событий: 2) записать распределение вероятностей элементарных событии; 3) найти вероятность тою, что: а) в семье два мальчика; б) не более двух мальчиков.

6. Стрелок, имея три патрона, стреляет по мишени. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Требуется: 1) записать пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей элементарных событий; 3) Tiai'rm вероятность того, что:
а) стрелок попадет D цель впервые при втором выстреле; б) стрелок не поразит цель.

7. Для допуска к сессии студент должен сдать 3 зачета. Вероягность того, что студент сдаст каждый из этих зачетов равна еоответстжчого 0,9; 0,8; 0,8. Записать: 1) пространство элементарных событий; 2) распределение вероятностей элементарных событий; 3) найти вероятность того, что: а) студент будет допущен к сессия; б) студент сдаст 2 зачета.

8. Устройство содержит три независимо работающих элемента. Вероятность отказов каждого из элементов равна 0,05. Требуется: 1) записать пространство элементарных событий; 2) найти вероятности элемс! парных событий; 3) найти: а) вероятность безотказной работы устройства; 6) вероятность того, что откажет ровно один элемент.

9. По каналу связи передается четыре сообщения. Каждое го них независимо от друпех с#вероятностыо 0,1 искажается помехами. Требуется: I) записать пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей элементарных событий; 3) найти вероятность того, что: а) все события будут приняты без искажений;
б) будет искажено не более одного сообщения.

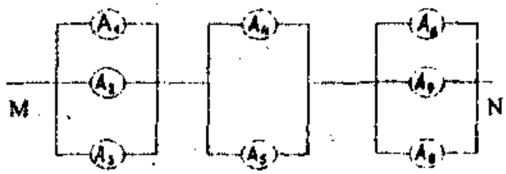
10. Проводятся три независимых измерения некоторой физической вегагчнкы. Вероятность допустить ошибку при считывании показаний прибора каждый раз равна 0,1. Требуется: 1) закисать пространство элементарных событии'. *2)* записать распределение вероятностей элементарных событии; 3) найти вероятноегь того, что: а) измерения будут проведены безошибочно; б) ошибка будет допущена только один раз.

Задание 12.2

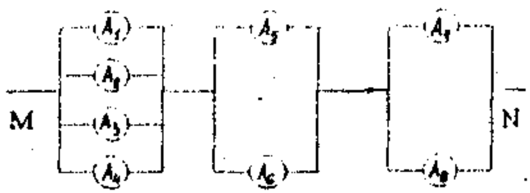
Электрическая цет> между точками M и N составлена но схеме, изображенной на соответствующем рисунке. Элементы A, *(i* = Г8) работают независимо друг от друга. Определить вероятность работы цепи и вероятность отказа, если известны вероятности работы элементов A_i.

В а р и а н т ы

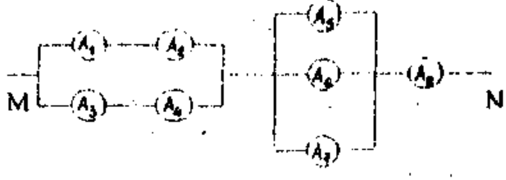
1. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}8$; $P(A_4) = P(A_5) = 0{,}9$; $P(A_6) = P(A_7) = P(A_8) = 0{,}75$.



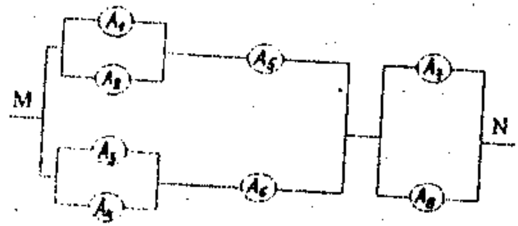
2. $P(A_i) = 0{,}7$; $i = \overline{1,4}$, $P(A_j) = 0{,}9$; $j = \overline{5,8}$.



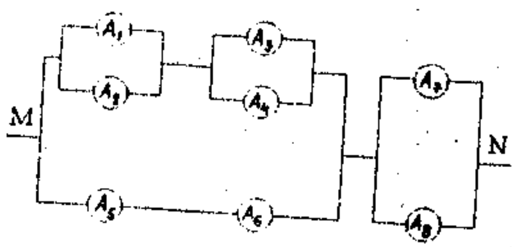
3. $P(A_i) = 0{,}8$; $i = \overline{1,4}$, $P(A_j) = 0{,}7$; $j = \overline{5,7}$, $P(A_8) = 0{,}9$.



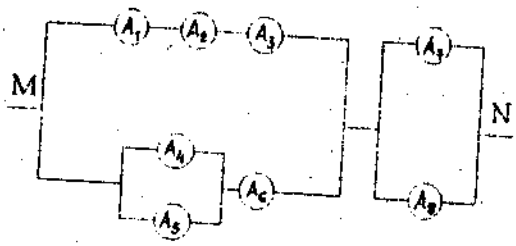
4. $P(A_i) = 0,7$; $i = \overline{1,4}$, $P(A_j) = 0,8$; $j = \overline{5,8}$.



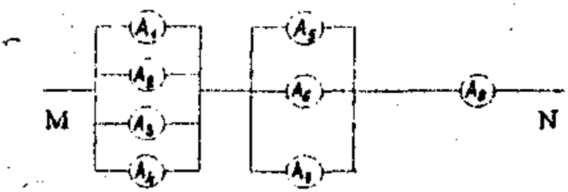
5. $P(A_i) = 0,75$; $i = \overline{1,4}$, $P(A_j) = 0,8$; $j = \overline{5,8}$.



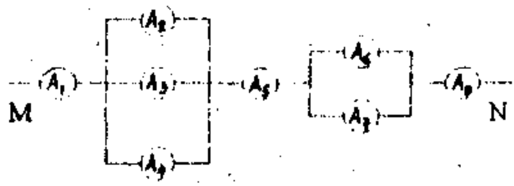
6. $P(A_i) = 0,9$; $i = \overline{1,3}$, $P(A_j) = 0,8$; $j = \overline{4,8}$.



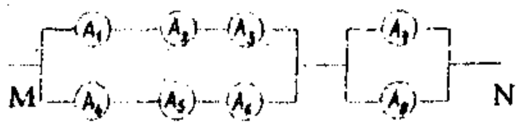
7. $P(A_i) = 0,6;\ i = \overline{1,4},\ P(A_j) = 0,7;\ j = \overline{5,7},\ P(A_8) = 0,9.$



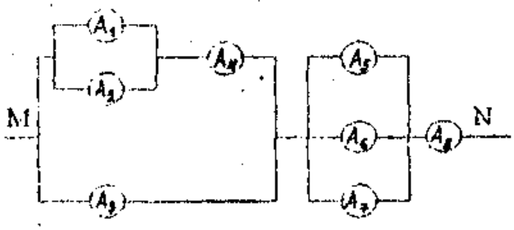
8. $P(A_i) = 0,7;\ i = \overline{1,4},\ P(A_1) = P(A_5) = P(A_8) = 0,9;\ P(A_6) = P(A_7) = 0,8.$



9. $P(A_i) = 0,75;\ i = \overline{1,6},\ P(A_7) = P(A_8) = 0,7$



10. $P(A_i) = 0,7;\ i = \overline{1,2},\ P(A_3) = P(A_4) = P(A_8) = 0,7;\ j = \overline{5,7},\ P(A_j) = 0,6.$



Зядинне 12. J

1. Имеется две урны: в первой находятся 2 белых и 3 черных шара, во второИ - 3 белых и 2 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают два шара, после чего нэ второй урш>1 извлекают один шар. Найти вероят ность того, что извлеченный шар белый.

2. Из двух орудий производится стрельба по цели. Вероятность попа - дання в цель для каждого орудия равна 0,8. Если в цель попал один сна - ряд, то цель поражается с вероятностью 0,8. Вероятность поражения цеди при двух попаданиях равна 0,95. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

3. Имеется^две урны: в первой находятся 2 белых и 3 черных шара, во второй - 3 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад урну и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. 11айти верояпюсть того, что этот шар вынут из первом урны.

4. Прибор состоит из двух узлов. Работа каждого из них необходима для работы прибора. Вероятность безотказной работы в течение времени Т первого узла равна 0,8; для вт орого узла эта вероятность равна 0,9. За время Т прибор вышел из строя. Найти вероятность того, что отказа/г только первый узел.

5. Имеется две партии однородных изделий. Первая партия содержит 10 изделий, среди которых 3 дефектных, вторая - 15, среди них 4 дефектных. Из первой партии случайным образом выбирается 4 изделия, га второй - 6; эти изделия перемешиваются. Из новой партии берется одно изделие. Найти вероятность того, что оно будет дефектным.

6. На сборку поступают деталд с двух автоматов. Производительность первого автомата в три раза больше производительности второго. Среди деталей, поступающих с і юрвого автомат а, 3% бракова! шых, со второ -

jo - 2%. Поступившая на сборку деталь стандартна, fl тйтн вероятность того, что она гоготовлена первым автоматом.

7. Для участия в школьных соревнованиях выбрано 4 ученика 9-го класса, 6 учеников 10 класса к 5 учеников 11 класса. Вероятность но - пасть в сборную школы для учеников каждого класса равна соответст-ве/шо 0,9; 0,7; 0,8. Случайно выбрашолй ученик в результате *сорсино* • ваття попал в сборную. Какому классу вероятнее всего принадлежал *эюх* ученик"?

8. Имеется три урны. В первой из них 3 белых и 2 черных шара, во второй - 2 белых и 3 черных, в третьей - только белые шары. Некто подходит к одной из урн и вынимает из нее два шара. Найти вероятность того, что оба выну! ые шара белые.

9. Имеется две партии но 15 изделий. Среди изделий первой партии 2 бракованные, среди второй - 3 бракованные Ит первой партии выбира - ют 7 изделий, из второй - 8; их.перемешивают. Среди них снова выбира-ют изделие, которое оказалось бракованным. Найти вероятность тою, * что оно принадлежало первой парши.

10. В урну, содержащую 3 шара, бросают белый шар, шары перемешивают и снова извлекают один шар. Найти вероятность того, что Извле - ченный шар белый, если все предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновероятны.

Задание 12.4

Случайная величина X задана плотностью вероятности fix). Найти: I) коэффициент *a; 2)* функцию распределения *У(x),* 3) М(X), Д(X), о(X), *4) 1>(a<X<* p); 5) Построить! рафики функции 1<x) и F(x).

Варианты

1. $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x^3}, & x\in[1,\infty); \\ 0, & x\notin[1,\infty), \end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=\infty.$

2. $f(x)=\begin{cases} a\cos x, & x\in[0,\ \pi/2]; \\ 0, & x\notin[0,\ \pi/2], \end{cases}$ $\alpha=0,\ \beta=\pi/4.$

3. $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0,3]; \\ 0, & x\notin[0,3], \end{cases}$ $\alpha=0,\ \beta=2.$

4. $f(x)=\begin{cases} a(2-|x|), & x\in[-2,2]; \\ 0, & x\notin[-2,2], \end{cases}$ $\alpha=-1,\ \beta=1.$

5. $f(x)=a e^{-|x|},\ \alpha=-1,\ \beta=1.$

$$6.\ f(x)=\begin{cases}0, & x\notin[0,\ a];\\ 1-\dfrac{x}{a}, & x\in[0,a],\end{cases}\quad \alpha=0,\ \beta=\frac{a}{2}.$$

$$7.\ f(x)=\begin{cases}a(220^2-x^2), & x\in[-220,220];\\ 0, & x\notin[-220,220],\end{cases}\quad \alpha=200,\ \beta=250.$$

$$8.\ f(x)=\begin{cases}2(1-\dfrac{|x|}{a}), & x\in[-a,a];\\ 0, & x\notin[-a,a],\end{cases}\quad \alpha=0,\ \beta=\frac{a}{2}.$$

$$9.\ f(x)=\begin{cases}ax^3, & x\in[0,2];\\ 0, & x\notin[0,2],\end{cases}\quad \alpha=0,\ \beta=1.$$

$$10.\ f(x)=\begin{cases}a(1-x^2), & |x|\le 2;\\ 0, & x\ge 0,\end{cases}\quad \alpha=-1,\ \beta=1.$$

Задание 12.5

1. Вероятность появления успеха в каждом из **625** независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появлсния успеха отклонится по абсолютной вешмине от его вероятности не более чем на 0,04.

2. Вероятность появления события в каждом из независимых испыта - **ний** равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в **100** испытаниях.

3. Испытания проводятся по схеме Бернулли. Вероятность того, что некоторое событие наступит 2 раза в трех исиытаниях,равна 0,9. Найти ве - роятность того, что это событие наступит *4* раза в 6 испытаниях.

4 Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероят - ностью 0,95 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 0,02?

5. Среднее число заявок, поступающих на предприятие обслуживают за I час, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 часа поступим) четыре заявки; б) менее трех заявок. Предполагается, что поток заявок про - стейший.

6. На надежность испытывают 400 трансформаторов. Вероятность вы - держать испытания для каждого из них равна 0,9. Найти вероятность то - го, что число трансформаторов, выдержавших испытание, находится в

пределах от 250 до 400.

7. Отдел технического контроля проверяет 900 деталей на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,9544 границы, в которых будет заключено число *m* стандартных деталей.

8. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за три минуты поступит: а) менее трех вызовов; б) 5 вызовов. Поток вызовов - простейший.

9. По цели производится 5 независимых выстрелов. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,8. Для поражения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

10. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром λ:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что СВ X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Методические указания к решению задач по теме "Теория вероятностей и математическая статистика"

Пример 12.1. Устройство содержит три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы за время T элементов равна соответственно 0,9; 0,7; 0,7. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) записать распределение вероятностей элементарных событий; 3) найти вероятность того, что в течение времени T: а) все элементы будут исправны; б) не менее двух элементов будут исправны.

Решение. *Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что в течение времени T i - й элемент будет исправным, $i=\overline{1,3}$, A - все элементы исправны, B - не менее двух элементов исправны. $\bar{A}_i$ - i - й элемент вышел из строя.*

1) Запишем пространство элементарных событий

$$\Omega=\{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\bar{A}_3,\ A_1\bar{A}_2A_3,\ A_1\bar{A}_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1A_2A_3,\ \bar{A}_1A_2\bar{A}_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2A_3,\ \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\}.$$

2) Найдем вероятности элементарных событий. Так как события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$$P_1=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}44.$$

Аналогично находим: $P_2 = P(A_1A_2\overline{A}_3) = 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}189.$

$P_3 = P(A_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 0{,}189.$

$P_4 = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0{,}081.$

$P_5 = P(\overline{A}_1A_2A_3) = 0{,}049.$

$P_6 = P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = 0{,}021.$

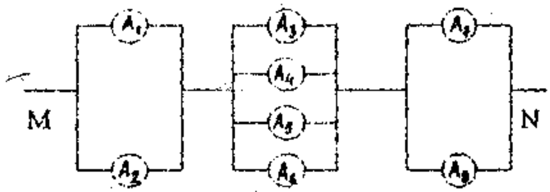
$P_7 = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}021.$

$P_8 = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}009.$

9). а).Найдем вероятность события A - все элементы исправны. $A = A_1A_2A_3$. Поэтому $P(A) = P_1 = 0{,}0441$.

б) Находим вероятность события B - не менее двух элементов исправно. $B = \{A_1A_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3\}$. Так как элементарные события несовместны, то $P(B) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) = 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}189 + 0{,}049 = 0{,}868$.

Пример 12.2. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме



Элементы A_i, $i = \overline{1,8}$, работают независимо. Заданы вероятности P_i, $i = \overline{1,8}$, работы элемента A_i: $P_1 = 0{,}7$; $P_2 = 0{,}8$; $P_j = 0{,}5$, $j = \overline{3,6}$, $P(A_7) = P(A_8) = 0{,}75$.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что цепь работает, $\overline{A}$ - цепь не работет. Блок, содержащий элементы A_1 и A_2, обозначим B_1. Аналогично, пусть блок B_2 состоит из элементов A_i, $i = \overline{3,6}$; блок B_3 - из элементов A_7 и A_8. Для любого события C $\overline{C}$ будет обозначать противоположное событие. Цепь работает, если одновременно работают последовательные блоки B_1, B_2 и B_3, т.е. $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Так как элементы A_i, $i = \overline{1,8}$, работают независимо друг от друга, то независимо друг от друга работают и блоки B_1, B_2 и B_3.

На основании теоремы умножения вероятностей для независимых событий имеем:

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3).$$

Вероятности $P(B_1)$ и $P(B_3)$ найдем по теореме сложения вероятностей:

$$P(B_1) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Аналогично определяем $P(B_3)$:

$$P(B_3) = P(A_7 \cup A_8) = 0{,}75 + 0{,}75 - 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375.$$

Для нахождения вероятности работы блока B_2 перейдем к противоположному событию, т.е. найдем вероятность $P(\overline{B}_2)$ того, что блок B_2 не работает. Но это возможно тогда и только тогда, когда не работают все блоки A_i, $i = \overline{3,6}$. По условию $P(A_i) = 0{,}5$, $i = \overline{3,6}$. Поэтому $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $i = \overline{3,6}$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(\overline{B}_2) = P(\overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6) = (0{,}5)^4 = 0{,}0625.$$

Значит, $P(B_2) = 1 - P(\overline{B}_2) = 0{,}0937$, а вероятность работы цепи равна

$$P(A) = 0{,}94 \cdot 0{,}9375 \cdot 0{,}9375 = 0{,}8262.$$

Тогда вероятность разрыва цепи

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8262 = 0{,}1738.$$

***Пример 12.3.** Имеются две урны, в первой урне находятся 2 белых и 3 черных шара, а во второй - 3 белых и 2 черных. Из первой урны во вторую перекладывают два шара, после чего из второй урны извлекают один шар. Извлеченный шар оказался белым. Найти вероятность того, что извлечен переложенный шар.*

***Решение.** Пусть A - событие, состоящее в том, что из второй урны извлечен белый шар. Выдвинем следующие гипотезы: H_1 - извлечен переложенный шар, H_2 - извлечен шар, первоначально принадлежавший второй урне. После перекладывания во второй урне стало семь шаров, поэтому $P(H_1) = 2/7$, $P(H_2) = 5/7$.*

Находим условие вероятности: $P(A/H_1) = 2/5$, $P(A/H_2) = 3/5$.

Тогда по формуле Бейеса

$$P\left(\frac{H_1}{A}\right) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{4}{4 + 15} = \frac{4}{19}.$$

Пример 12.4. *Случайная величина X задана плотностью вероятности*

$$f(x)=\begin{cases} a(1-|x|^3), & x\in[-1,1]; \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$$

Найти: *1) коэффициент a ; 2) функцию распределения F(x);*
3) M(X), Д(X), σ(X); 4) P(0≤X ≤ 1/2);
5) построить графики f(x), F(x).

Решение. *1).Для нахождения коэффициента a используем условие нормировки* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. *Функция f(x) на различных участках задана разными формулами. Учитывая, что* $|x|=\begin{cases} x, x\ge 0; \\ -x, x<0 \end{cases}$, *разобьем интеграл на сумму интегралов:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1} 0\cdot dx+\int\limits_{-1}^{0} a(1+x^3)dx+\int\limits_{0}^{1} a(1-x^3)dx+\int\limits_{1}^{\infty} 0\cdot dx=$$

$$=a\left(x+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+a\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=a(1-\frac{1}{4})+a(1-\frac{1}{4})=\frac{3a}{2}=1$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}\left(1-|x|^3\right), & x\in[-1,1]; \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$$

2) Найдем функцию распределения F(x).

$$F(x)=P(-\infty<X<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Рассмотрим несколько случаев.

а) $x\in(-\infty,-1]$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0.$

б) $x\in(-1,0]$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-1} 0\cdot dt+\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{x}(1+t^3)dt=\frac{2}{3}\left(t+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{x}=\frac{2}{3}(x+\frac{x^4}{4}+$

$$+1-\frac{1}{4})=\frac{2}{3}(x+\frac{x^4}{4})+\frac{1}{2}.$$

в) $x \in (0, 1]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dt + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(1+t^3)dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{x}(1-t^3)dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left(t + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{2}{3}\left(t - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right).$$

г) $x \in [1, +\infty)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dt + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(1+t^3)dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(1-t^3)dt + \int_{1}^{x} 0 \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left(t + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{2}{3}\left(t - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Окончательно имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1]; \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(x + \frac{x^4}{4}\right), & x \in (-1, 0]; \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right), & x \in (0, 1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3). $$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} x(1+x^3)dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1} x(1-x^3)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x + x^4)dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(x - x^4)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{1}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 0.$$

$Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = M(X^2).$

Но

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} x^2(1+x^3)dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1} x^2(1-x^3)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x^2+x^5)dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(x^2-x^5)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{0}^{1}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{9}.$$

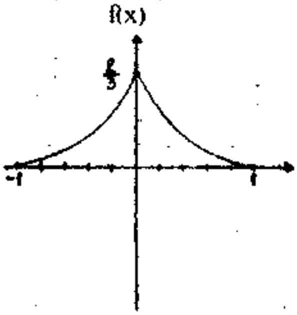
$$D(X) = \frac{4}{9}. \qquad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

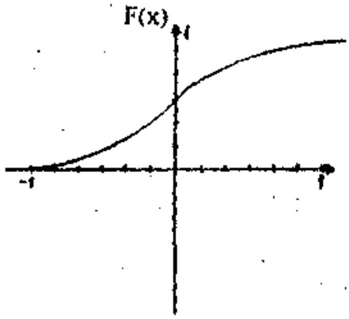
4). $P(0 \le X \le 1/2) = F(1/2) - F(0) = 1/2 + 2/3(1/2 - (1/2)^4/4) - 1/2 = 31/96.$

Замечание. *Искомую вероятность можно также найти через плотность вероятности:*

$$P(0 \le X \le 1/2) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}(1-x^3)dx = \frac{31}{96}.$$

5). *Строим графики $f(x)$ и $F(x)$.*





Пример 12.5. *Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Найти вероятность того, что за время T из строя выйдут из 100 конденсаторов: а) ровно 25; б) от 14 до 26.*

Решение. *а). Найдем вероятность того, что за время T из строя выйдет ровно 25 конденсаторов. Воспользуемся локальной формулой Муавра-Лапласа:*

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x); \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В нашем случае имеем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 4; \qquad x = \frac{25 - 20}{4} = 1{,}25.$$

По таблице функции $f(x)$ находим: $f(1{,}25) = 0{,}1826$. Значит.

$$P_{100}(25) = \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}0457.$$

б). Найдем вероятность того, что число вышедших из строя конденсаторов будет находиться в пределах от 14 до 26. Применим интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P(K_1 < X_n < K_2) \approx \Phi\left(\frac{K_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{K_1 - np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

В нашем случае имеем:

$$P(14 < X_n < 26) \approx \Phi((26\text{-}20)/4) - \Phi((14\text{-}20)/4) =$$
$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = 2\Phi(1{,}5).$$

Значение $\Phi(1{,}5)$ находим по таблице значений функции Лапласа:

$$\Phi(1{,}5) \approx 0{,}43319$$

Окончательно имеем.

$$P(14 < X_n < 26) \approx 2 \cdot 0{,}43319 = 0{,}8664.$$

Приложение

Содержание контрольных работ определяется согласно таблице.
Специальности: электроэнергетика (Т.01.01), полная форма обучения, теплоэнергетика (Т.01.02), автоматизация и управление энергетическими процессами (Т.01.03).

Контр. раб-ты	1	2	3	4
№ заданий	1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5;	2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 2.7; 2.8;	3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 4.1; 4.2	5.1; 5.2; 5.3; 5.4

Контр. раб-ты	5	6	7	8
№ заданий	6.1; 6.2; 6.3; 7.1; 7.2; 7.3;	8.1; 8.2; 8.3; 8.4 9.1; 9.2	10.1; 10.2; 11.1; 11.2	12.1; 12.2; 12.3; 12.4; 12.5

Электроэнергетика (Т.01.01), сокращенная форма обучения

Контр. раб-ты	1	2	3	4
№ заданий	1.1*; 1.3; 1.4; 2.1; 2.2	3.1 a; 3.2; 2.4(a, в,c); 2.6; 2.7	4.1; 5.3; 6.1; 6.2; 7.1	8.3; 10.1; 12.1; 12.4; 12.5

Профессиональное обучение (П.03.01–С)

Контр. раб-ты	1	2	3
№ заданий	1.1*; 1.3; 2.1; 2.2; 2.4 (a,в,c)	3.1; 3.2; 6.2; 5.1; 5.3	8.3; 12.1; 12.3; 12.4; 12.5

* - Заданную систему линейных алгебраических уравнений решить по формулам Крамера, матричным способом и методом Гаусса

Содержание

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
энергетических и инженерно-педагогических
специальностей

2-е издание

Составители: ЕМЕЛИЧЕВА Елена Владимировна
КАРПУК Василий Васильевич
КЕДА Николай Петрович и др.

Под общей редакцией Н.П.Кеда

Редактор Т.Н.Микулик

Подписано в печать 26.06.1998.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,3. Уч.-изд. л. 4,2. Тираж 300. Заказ 593.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
Лицензия ЛВ №155 от 30.01.98.220027, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.