**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

по физике для студентов.

**Физические основы механики**.

1. Движение тела массой lкг задано уравнением $S = 6t^3 + 3t + 2$. Найти зависимость скорости и ускорения от времени. Вычислить силу, действующую на тело в конце второй секунды.

Дано: m=1кг, $S = 6t^3 + 3t + 2$

Найти: υ(t), *a*(t), *F*.

**Решение.** Мгновенную скорость находим как производную от пути по времени:

$$v=\frac{ds}{dt};\ v=18t^2+3.$$

Мгновенное ускорение определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2};\ a=36t.$$

Сила, действующая на тело, определяется по второму закону Ньютона**:** *F=ma,* где *a,* согласно условию задачи,— ускорение в конце второй секунды. Тогда

$$F=m\cdot 36t;\ F=1\text{ кг}\cdot 36\cdot 2\text{ м/с}^2=72\text{ Н}.$$

**Ответ:** $v=18t^2+3;\ a=36t;\ F=72$ Н.

2. Стержень длиной 1м движется мимо наблюдателя со скоростью 0,8с. Какой покажется наблюдателю его длина?

Дано: $l_0$=1м, υ=0,8с

Найти: $l$.

**Решение.** Зависимость длины тела от скорости в релятивистской механике выражается формулой

$$l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}, \qquad \textbf{(1)}$$

где $l_0$— длина покоящегося стержня; υ— скорость его движения; *c*— скорость света в вакууме. Подставляя в формулу (1) числовые значения, имеем

$$l=1\text{ м}\sqrt{1-(0{,}8\ c)^2/c^2}=1\text{ м}\sqrt{1-0{,}64}=0{,}6\text{ м}.$$

**Ответ: *l*= 0,6м.**

3. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями: 1) υ=0,5*c* и *u*=0,75*c;* 2) υ=*c* и u=0,75c. Найти их относительную скорость в первом и втором случаях.

Дано: 1) υ=0,5c, u=0,75c; 2) υ=*c,* u=0,75c.

Найти: $u'_1$; $u'_2$

**Решение.** Согласно теореме сложения скоростей в теории относительности,

$$u'=\frac{v+u}{1+vu/c^2},$$

где υ, *u* — скорости соответственно первой и второй частиц;

u′ — их относительная скорость; *c* — скорость света в вакууме. Для первого и второго случаев находим:

$$u'_1=\frac{0{,}5c+0{,}75c}{1+\frac{0{,}5c\cdot 0{,}75c}{c^2}}=0{,}91c;$$

$$u'_2=\frac{c+0{,}75c}{1+\frac{0{,}75c^2}{c^2}}=\frac{1{,}75c}{1{,}75}=c.$$

Это означает, что, во-первых, ни в какой инерциальной системе отсчета скорость процесса не может превзойти скорость света, и, во-вторых, скорость распространения света в вакууме абсолютна.

**Ответ: $u'_1$=0,91с; $u'_2$=с**

4. На двух шнурах одинаковой длины, равной 0,8м, подвешены два свинцовых шара массами 0,5 и 1кг. Шары соприкасаются между собой. Шар меньшей массы отвели в сторону так, что шнур отклонился на угол α=60°, и отпустили. На какую высоту поднимутся оба шара после столкновения? Удар считать центральным и неупругим. Определить энергию, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

Дано: $m_1$=0,5кг, $m_2$=1кг, α= 60°, $l$=0,8м.
Найти: $h_1$; $\Delta E_g$

**Решение.** Так как удар шаров неупругий, то после удара шары будут двигаться с общей скоростью υ. Закон сохранения импульса при этом ударе имеет вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \qquad \textbf{(1)}$$

Здесь $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$ — скорости шаров до удара. Скорость большого шара до удара равна нулю ($\upsilon_2$=0). Скорость меньшего шара найдем, используя закон сохранения энергии. При отклонении меньшего шара на угол α ему сообщается потенциальная энергия, которая затем переходит в кинетическую: $m_1 g h_1 = m_1 \upsilon_1^2/2$. Таким образом,
$h_1 = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, поэтому

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2). \qquad \textbf{(2)}$$

Из уравнений (1) и (2) находим скорость шаров после удара:

$$v = m_1 v_1/(m_1 + m_2) = 2m_1\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}\Big/(m_1 + m_2). \qquad \textbf{(3)}$$

Кинетическая энергия, которой обладают шары после удара, переходит в потенциальную:

$$(m_1 + m_2)v^2/2 = (m_1 + m_2)gh, \qquad \textbf{(4)}$$

где $h$— высота поднятия шаров после столкновения. Из формулы (4) находим $h = \upsilon^2/(2g)$, или с учетом (3),

$$h = 2m_1^2 l \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}\Big/(m_1 + m_2)^2;$$

$$\boldsymbol{h = 2\,(0{,}5\text{кг})^2 \cdot 0{,}8\text{ м} \cdot 0{,}25/(0{,}5\text{ кг} + 1\text{ кг}) = 0{,}044\text{ м.}}$$

При неупругом ударе шаров часть энергии расходуется на их деформацию. Энергия деформации определяется разностью кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta E_g = m_1 v_1^2/2 - (m_1 + m_2)v^2/2.$$

Используя уравнения (2) и (3), получаем

$$\Delta E_g = 2glm_1\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\boldsymbol{\Delta E_g = 2 \cdot 9{,}81\text{м/с}^2 \cdot 0{,}8\text{м} \cdot 0{,}5\text{кг}(1 - 0{,}5\text{кг}/1{,}5\text{кг}) \cdot 0{,}25 = 1{,}3\text{Дж.}}$$

**Ответ: h=0,044м, $\Delta E_g$=1,3Дж.**

5. Молот массой 70кг падает с высоты 5м и ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием 1330кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на деформацию изделия. Систему молот — изделие — наковальня считать замкнутой.

Дано: $m_1$=70кг, $h$=5м, $m_2$=1330кг.
Найти: $E_g$.

**Решение.** По условию задачи, система молот — изделие — наковальня считается замкнутой, а удар неупругий. На основании закона сохранения энергии можно считать, что энергия, затраченная на деформацию изделия, равна разности значений механической энергии системы до и после удара.

Считаем, что во время удара изменяется только кинетическая энергия тел, т. е. незначительным перемещением тел по вертикали во время удара пренебрегаем. Тогда для энергии деформации изделия имеем

$$E_g = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v'^2}{2}, \quad (1)$$

где $\upsilon$— скорость молота в конце падения с высоты *h;* $\upsilon'$— общая скорость всех тел системы после неупругого удара. Скорость молота в конце падения с высоты А определяется без учета сопротивления воздуха и трения по формуле

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Общую скорость всех тел системы после неупругого удара, найдем, применив закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \text{const}. \quad (3)$$

Для рассматриваемой системы закон сохранения импульса имеет вид $m_1\upsilon=( m_1 +m_2)\upsilon'$, откуда

$$v' = m_1 v/(m_1+m_2). \quad (4)$$

Подставив в формулу (1) выражения (2) и (4), получим

$$E_g = m_1 gh \frac{m_2}{m_1+m_2};$$

$$E_g = 70 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 \cdot 5 \text{ м} \frac{1330 \text{ кг}}{1330 \text{ кг} + 70 \text{ кг}}.$$

**Ответ: $E_g$=3258Дж.**

6. Тело массой 1кг под действием постоянной силы движется прямолинейно. Зависимость пути, пройденного телом, от времени задана уравнением $s=2t^2+4t+1$. Определить работу силы за 10с с начала ее действия и зависимость кинетической энергии от времени.

Дано: $m$=1кг, $s=2t^2+4t+1$

Найти: $A$, $T=f(t)$.

**Решение.** Работа, совершаемая силой, выражается через криволинейный интеграл

$$A = \int F \mathrm{d}s. \quad (1)$$

Сила, действующая на тело, по второму закону Ньютона равна

$$F = m \cdot a \text{ или } F = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}. \quad (2)$$

Мгновенное значение ускорения определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени. В соответствии с этим находим

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4t+4; \ (3) \quad a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 4 \text{ м/с}^2. \ (4)$$

Тогда

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 4m. \quad (5)$$

Из выражения (3) определим *ds:*

$$ds=(4t+4)dt \qquad (6)$$

Подставив (5) и (6) в уравнение (1), получим

$$A=\int 4m(4t+4)\,dt.$$

По этой формуле определим работу, совершаемую силой за 10с с начала ее действия:

$$A=\int_0^{10}(16mt+16m)\,dt=m\left[\frac{16t^2}{2}\Big|_0^{10}+16t\Big|_0^{10}\right]=$$

$$=1(8\cdot 100+16\cdot 10)\ Дж=960\ Дж.$$

Кинетическая энергия определяется по формуле

$$T=m\upsilon^2/2 \qquad (7)$$

Подставляя (3) в (7), имеем

$$T=m(4t+4)^2/2=m(16t^2+32t+16)/2=m(8t^2+16t+8).$$

**Ответ: A=960 Дж, $T=m(8t^2+16t+8)$**

7. Протон движется со скоростью 0,7*c (c*— скорость света). Найти импульс и кинетическую энергию протона.

Дано: υ=0,7с.

Найти: р; Т

**Решение.** Импульс протона определяется по формуле

$$p=m\cdot\upsilon \qquad (1)$$

Так как скорость протона сравнима со скоростью света, то необходимо учесть зависимость массы от скорости, воспользовавшись релятивистским выражением для массы:

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}=m_0/\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (2)$$

где *m*— масса движущегося протона; $m_0=1{,}67\cdot10^{-27}$кг— масса покоя протона; υ— скорость движения протона; $c=3\cdot10^8$м/с— скорость света в вакууме; $\upsilon/c=\beta$— скорость протона, выраженная в долях скорости света.

Подставляя уравнение (2) в (1) и учитывая, что ß= υ/*c*, получаем

$$p=m_0\cdot c\cdot\beta/\sqrt{1-\beta^2};$$

$$p=1{,}67\cdot10^{-27}\ кг\cdot 3\cdot10^8\ м/с\cdot 0{,}7/\sqrt{1-0{,}7^2}=4{,}91\cdot10^{-19}\ кг\cdot м/с.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы определяется как разность между полной энергией *E* и энергией покоя $E_0$ этой частицы**:**

$$T=E-E_0 \qquad (3)$$

где

$$E=m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2},\ E_0=m_0c^2.$$

Вычислим энергию покоя протона:

$$E_0=1{,}67\cdot10^{-27}\ кг\,(3\cdot10^8\ м/с)^2=1{,}5\cdot10^{-10}\ Дж.$$

**Тогда (см. формулу (3))**

$$T=m_0c^2\ (1/\sqrt{1-\beta^2}-1);$$

$$T=1{,}5\cdot10^{-10}\ Дж\ (1/\sqrt{1-0{,}7^2}-1)=0{,}6\cdot10^{-10}\ Дж.$$

**Ответ: $p=4{,}91\cdot10^{-19}$кг•м/с, $T=0{,}6\cdot10^{-10}$Дж.**

8. Тонкий стержень массой 300г и длиной 50см вращается с угловой скоростью $10с^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти угловую скорость, если в процессе вращения в той же плоскости стержень переместится так, что ось вращения пройдет через конец стержня.

Дано: $m$=300г=0,3кг, $l$=50см=0,5м, $\omega_1$=10с$^{-1}$.
Найти: $\omega_2$.

**Решение.** Используем закон сохранения момента количества движения

$$\sum_{i=1}^{n} J_i\omega_i = \text{const}, \qquad \textbf{(1)}$$

где $J_i$ — момент инерции стержня относительно оси вращения.
Для изолированной системы тел векторная сумма моментов импульса остается постоянной. В данной задаче вследствие того, что распределение массы стержня относительно оси вращения изменяется, момент инерции стержня также изменится. В соответствии с (1) запишем

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \qquad \textbf{(2)}$$

Известно, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, равен

$$J_0 = ml^2/12. \qquad \textbf{(3)}$$

По теореме Штейнера, $J=J_0+md^2$**,**
где $J$— момент инерции тела относительно производной оси вращения; $J_0$— момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс; $d$— расстояние от центра масс до выбранной оси вращения.
Найдем момент инерции относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню:

$$J_2=J_0+md^2,\ \ J_2=ml^2/12+m(l/2)^2 = ml^2/3. \qquad \textbf{(4)}$$

Подставляя, формулы (3) и (4) в (2), имеем:

$$ml^2\omega_1/12 = ml^2\omega_2/3,$$

откуда

$$\omega_2=\omega_1/4,\ \omega_2 = 10\ \text{с}^{-1}/4 = 2{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

**Ответ:$\omega$=2,5с$^{-1}$.**

9. Маховик массой 4кг вращается с частотой 720мин$^{-1}$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Массу маховика можно считать равномерно распределенной по его ободу радиусом 40см. Через 30с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое сделает маховик до полной остановки.

Дано: $\omega$=0, $m$=4кг, $n$=720мин$^{-1}$=12с$^{-1}$; $\Delta$t=30с, $R$=0,4м
Найти: $M$; $N$.

**Решение.** Для определения тормозящего момента $M$ сил, действующих на тело, нужно применить основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J\cdot\Delta\omega = M\cdot\Delta t, \qquad \textbf{(1)}$$

где $J$— момент инерции маховика относительно оси, проходящей через центр масс; $\Delta\omega$— изменение угловой скорости за промежуток времени $\Delta$t.
По условию, $\Delta\omega=-\omega_0$, где $\omega_0$ — начальная угловая скорость, так как конечная угловая скорость $\omega$=0. Выразим начальную угловую скорость через частоту вращения маховика; тогда $\omega_0=2\pi n$ и $\Delta\omega=2\pi n$. Момент инерции маховика $J=mR^2$, где — масса маховика; $R$— его радиус. Формула (1) принимает вид

$$mR^2 2\pi n = M\cdot\Delta t,$$

откуда

$$M = 2\cdot 3{,}14\cdot 12\ \text{с}^{-1}\cdot 4\ \text{кг}\cdot 0{,}16\ \text{м}^2\text{с}^{-2}/30\ \text{с} = 1{,}61\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Угол поворота (т. е. угловой путь φ) за время вращения маховика до остановки может быть определен по формуле для равнозамедленного вращения:

$$\varphi = \omega_0 t - \varepsilon\cdot\Delta t^2/2, \qquad \textbf{(2)}$$

где $\varepsilon$— угловое ускорение. По условию, $\omega=\omega_0-\varepsilon\Delta t$, $\omega=0$, $\varepsilon \cdot \Delta t=\omega_0$ . Тогда выражение (2) можно записать так:

$$\varphi=\omega_0\Delta t-\omega_0\Delta t/2=\omega_0\Delta t/2.$$

Так как $\varphi=2\pi N$, $\omega_0=2\pi n$, то число полных оборотов

$$N=n\cdot\Delta t/2;\ N=12\ \text{с}^{-1}\cdot 30\ \text{с}/2=180.$$

**Ответ: $M$=1,61Н·м, $N$=180.**

## Физика механических колебаний и волн

10. Материальная точка массой 10г совершает гармоническое колебание с периодом 1с. Определить амплитуду колебаний, максимальные скорость и ускорение колеблющейся точки, если полная энергия точки равна 0,02Дж.

Дано: $m$=0,01кг, T=1с, E=0,02Дж.

Найти: $A$, $\upsilon_{max}$, $a_{max}$.

**Решение.** Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad (1)$$

где $s$— смещение материальной точки от положения равновесия, A— амплитуда колебания, ω— циклическая частота, t— время, $\varphi_o$— начальная фаза.

Скорость материальной точки определяется как первая производная от смещения по времени:

$$v=\frac{ds}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (2)$$

Максимальное значение скорости равно

$$v_{max}=\omega A. \qquad (3)$$

Ускорение точки определяется как первая производная от скорости по времени:

$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi_0). \qquad (4)$$

Максимальное значение ускорения равно

$$a_{max}=\omega^2 A \qquad (5)$$

Полная энергия колебания складывается из кинетической и потенциальной энергии и равна максимальной кинетической или максимальной потенциальной энергии:

$$E=T_{max}=\frac{mv_{max}^2}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}. \qquad (6)$$

Из этого выражения найдем амплитуду колебания

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (7)$$

Произведем вычисления, учитывая, что циклическая частота и период колебаний связаны соотношением

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14}{1\ \text{с}}=6{,}28\ \text{с}^{-1};$$

$$A=\frac{1}{6{,}28\ \text{с}^{-1}}\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}02\ \text{Дж}}{0{,}01\ \text{кг}}}=0{,}32\ \text{м};$$

$$v_{max}=6{,}28\ \text{с}^{-1}\cdot 0{,}32\ \text{м}=2\ \text{м/с};$$

$$a_{max}=(6{,}28\ \text{с}^{-1})^2\cdot 0{,}32\ \text{м}=12{,}6\ \text{м/с}^2.$$

**Ответ: A=0,32м, $\upsilon_{max}$=2м/с, $a_{max}$=12,6м/с$^2$.**

11.Однородный диск радиусом R=20см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l$=15см от центра диска. Определить период колебаний диска относительно оси.

Дано: Решение

R=20см=0,2м

$l$=15см=0,15м

Найти:

T -?

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \ (1)$$

По условию задачи $l=d$, на основании теоремы Штейнера момент инерции диска относительно заданной оси :

$$J = \frac{mR^2}{2} + ml^2 \ (2)$$

Подставляем (2) в (1) : $T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + 2ml^2}{2mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}}$

Расчет: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{(0{,}2)^2 + 2\cdot(0{,}15)^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}15}} = 1{,}07c$

Ответ: 1,07с

12. Тело массой 0,6кг, подвешенное на спиральной пружине жесткостью $\kappa$=30Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания $\theta$=0,01. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний гири, при котором амплитуда колебаний также уменьшилась в 3 раза.

Дано: Решение

m=0,6кг

$\kappa$=30Н/м

$\theta$=0,01

$A_1/A_2=3$

Найти:

$t_1$-?

$N_1$-?

Уравнение затухающих колебаний: $x = A_0\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ (1)

по условию $\frac{A_1}{A_2} = 3$ (2) и $\frac{A_1}{A_2} = e^{\delta\cdot t_1}$ (3) . Прологарифмируем выражение (3): $\ln\frac{A_1}{A_2} = \delta\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\delta}\ln\frac{A_1}{A_2}$ (4). Выразим коэффициент затухания через логарифмический декремент затухания $\delta = \frac{\theta}{T}$ (5) и учтем, что период колебаний пружинного маятника : $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$ (6).

Подставляем (6) в (5) –получаем (7). (7) подставляем в (4): $t_1 = \frac{2\pi}{\theta}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2}$. Определим число полных колебаний гири:

$$N_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{\theta}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2}$$

Расчет: $t_1 = \frac{2\pi}{\theta}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}01}\cdot\sqrt{\frac{0{,}6}{30}}\cdot 3 = 97{,}6\tilde{n}$

$$N_1 = \frac{1}{\theta}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{0{,}01}\cdot 3 = 110$$

Ответ: 97,6с; 110

13. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой совпадающей с положительным направлением оси ОХ, в среде не поглощающей энергию со скоростью $v = 10\grave{i}\ /\tilde{n}$. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1$=7м и $x_2$=10м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз Δφ=3π/5. Амплитуда волны $A$=5см. Определить: 1) длину волны $\lambda$; 2)смещение $\xi_2$ второй точки в момент времени $t=2c$.

Дано: Решение

$v = 10\grave{i}\ /\tilde{n}$

Выразим разность фаз Δφ через координаты двух колеблющихся точек

| | |
|---|---|
| $x_1$=7м | $x_1$ и $x_2$ : $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$ (1) . Из (1) находим длину волны |
| $x_2$=10м | $\lambda = \dfrac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1)$.Записываем уравнение плоской синусоидальной волны |
| $\Delta\varphi$=3π/5 | $\xi(x,t) = A\cos\omega(t - \dfrac{x}{v})$. Учтем, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ , а период колебаний $T = \dfrac{\lambda}{v}$ . |
| $A$=5см=0,05м | Т.о. циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$. Находим искомое смещение |
| $t$=2c | $\xi_2 = A\cos(\omega t_2 - \dfrac{x_2}{\lambda})$ . |
| Найти: | Расчет: $\lambda = \dfrac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1) = \dfrac{2\cdot 3{,}14}{3\pi/5}(10-7) = 10$ì |
| $\lambda$ - ? | $\xi_2 = A\cos(\omega t_2 - \dfrac{x_2}{\lambda}) = 0{,}05\cos(2\cdot 3{,}13\cdot 2 - \dfrac{10}{10}) = 0{,}05$ì |
| $\xi_2$ - ? | Ответ: 10м; 0,05м. |

## Молекулярная физика и термодинамика

14. В сосуде объемом 2м$^3$ находится смесь 4кг гелия и 2кг водорода при температуре 27°С. Определить давление и молярную массу смеси газов.
Дано:V=м$^3$, $m_1$=4 кг, $M_1$= 4•10$^{-3}$кг/моль, $m_2$=2кг, $M_2$=2•10$^{-3}$кг/моль, T=300K.
Найти: P; M.

**Решение.** Воспользуемся уравнением Клапейрона — Менделеева, применив его к гелию и водороду:

$$P_1V=m_1RT/M_1 \qquad (1)$$
$$P_2V=m_2RT/M_2 \qquad (2)$$

где $p_1$— парциальное давление гелия; $m_1$— масса гелия;
$M_1$— его молярная масса; V— объем сосуда; T— температура газа; R=8,31Дж/(моль•К) — молярная газовая постоянная; $p_2$— парциальное давление водорода; $m_2$— масса водорода; $M_2$— его молярная масса. Под парциальным давлением $p_1$ и $p_2$ понимается то давление, которое производил бы газ, если бы он только один находился в сосуде. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси:

$$p=p_1+p_2 \qquad (3)$$

Из уравнения (1) и (2) выразим $p_1$ и $p_2$ и подставим в уравнение (3). Имеем

$$p = \frac{m_1RT}{M_1V} + \frac{m_2RT}{M_2V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \qquad (4)$$

Молярную массу смеси газов найдем по формуле

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2} \qquad (5)$$

где $\nu_1$ и $\nu_2$ — число молей гелия и водорода соответственно. Число молей газов определим по формулам:

$$\nu_1=m_1/M_1 \qquad (6)$$
$$\nu_2=m_2/M_2 \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), найдем

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}. \qquad (8)$$

Подставляя числовые значения в формулы (4) и (8), получаем

$$p=\left(\frac{4\ \text{кг}}{4\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}}+\frac{2\ \text{кг}}{2\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}}\right)\frac{8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 300}{2\ \text{м}^3}.$$

Таким образом, p=2493кПа.

$$M=\frac{4\ \text{кг}+2\ \text{кг}}{4\ \text{кг}/(4\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{моль}^{-1})+2\ \text{кг}/(2\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{моль}^{-1})}=$$

$$=3\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}.$$

Ответ: p=2493кПа, $M=3\cdot10^{-3}$кг/моль.

15. Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в 2кг водорода при температуре 400К?

Дано: m=2кг, T=400 К, $M=2\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $\langle\varepsilon_{пост}\rangle$; $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$.

**Решение.** Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода — двухатомная, связь между атомами считаем жесткой. Тогда число степеней свободы молекулы водорода равно 5. В среднем на одну степень свободы приходится энергия $\langle\varepsilon_i\rangle=kT/2$, где k— постоянная Больцмана; T— термодинамическая температура. Поступательному движению приписывается три (i=3), а вращательному две (i=2) степени свободы. Энергия одной молекулы

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=\frac{3}{2}kT;\ \langle\varepsilon_{вр}\rangle=\frac{2}{2}kT.$$

Число молекул, содержащихся в массе газа,

$$N=\nu\cdot N_A=(m/M)\cdot N_A,$$

где $\nu$— число молей; $N_A$— постоянная Авогадро. Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул водорода

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=(m/M)N_A\cdot{}^3/_2\cdot kT={}^3/_2(m/M)RT, \qquad \textbf{(1)}$$

где $R=kN_A$— молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\langle\varepsilon_{вр}\rangle=(m/M)RT. \qquad \textbf{(2)}$$

Подставляя числовые значения в формулы (1) и (2), имеем

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=\frac{3\cdot 2\ \text{кг}\cdot 8{,}31\ \text{Дж/(маль}\cdot\text{К)}\cdot 400\ \text{К}}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}}=49{,}86\cdot 10^5\ \text{Дж}=4985\ \text{кДж}.$$

$$\langle\varepsilon_{вр}\rangle=\frac{2\ \text{кг}\cdot 8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 400\ \text{К}}{2\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}}=33{,}24\cdot 10^5\ \text{Дж}=3324\ \text{кДж}.$$

**Ответ: $\langle\varepsilon_{пост}\rangle$=4986кДж, $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$=2324кДж.**

15. Определить среднюю длину свободного пробега молекул и число соударений за 1с, происходящих между всеми молекулами кислорода, находящегося в сосуде емкостью 2л при температуре 27°С и давлении 100кПа.

Дано: $V=2л=2\cdot10^{-3}м^3$, $M=32\cdot10^{-3}$кг/моль, T=300K, $p=100кПа=10^5Па$, $d=2{,}9\cdot10^{-10}$м.

Найти: $\langle\lambda\rangle$; Z.

**Решение**. Средняя длина свободного пробега молекул кислорода вычисляется по формуле

$$\langle\lambda\rangle=1/(\sqrt{2}\pi d^2 n), \qquad \textbf{(1)}$$

где $d$— эффективный диаметр молекулы кислорода; $n$— число молекул в единице объема, которое можно определить из уравнения

$$\boldsymbol{n=p/(kT)}, \qquad \textbf{(2)}$$

где k— постоянная Больцмана. Подставляя (2) в (1), имеем

$$\langle\lambda\rangle = kT/(\sqrt{2}\cdot\pi d^2 p). \qquad \textbf{(3)}$$

Число соударений Z, происходящих между всеми молекулами за 1с, равно

$$Z=1/2\langle Z\rangle N \qquad \textbf{(4)}$$

где *N*— число молекул кислорода в сосуде объемом $2\cdot10^{-3}$м$^3$; <Z>— среднее число соударений одной молекулы за 1с. Число молекул в сосуде

$$N=n\cdot V \qquad \textbf{(5)}$$

Среднее число соударений молекулы за 1с равно

$$\langle Z\rangle = \langle v\rangle/\langle\lambda\rangle, \qquad \textbf{(6)}$$

где <*v*>— средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v\rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)}. \qquad \textbf{(7)}$$

Подставляя в (4) выражения (5), (6) и (7), находим

$$Z=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{8RT/(\pi M)}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi d^2 p}{kT}\cdot\frac{p}{kT}\cdot V=\frac{2\pi d^2p^2V}{k^2T^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$Z=\frac{2\cdot3{,}14\cdot2{,}9^2\cdot10^{-20}\ \text{м}^2\cdot10^{10}\ \text{Па}^2\cdot2\cdot10^{-3}\ \text{м}^3}{1{,}38\cdot10^{-46}\ \text{Дж}^2\cdot\text{К}^{-2}\cdot9\cdot10^4\ \text{К}^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot300\ \text{К}}{3{,}14\cdot32\cdot10^{-3}\ \text{кг/моль}}}=9\cdot10^{28}\ \text{с}^{-1};$$

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1{,}38\cdot10^{-23}\ \text{Дж/К}\cdot300\ \text{К}}{\sqrt{2}\cdot3{,}14\cdot2{,}9^2\cdot10^{-20}\ \text{м}^2\cdot10^5\ \text{Па}}=3{,}56\cdot10^{-8}\ \text{м}.$$

**Ответ: $Z=9\cdot10^{28}$с$^{-1}$, $\langle\lambda\rangle=3{,}56\cdot10^{-8}$м.**

16. Определить коэффициенты диффузии и внутреннего трения азота, находящегося при температуре Т=300К и давлении $10^5$Па.

Дано: $\rho_0=1{,}25$кг/м$^3$, $M=28\cdot10^{-3}$кг/моль, Т=300К, $p=10^5$Па, $d=3{,}1\cdot10^{-10}$м.

Найти: *D; η*

**Решение**. Коэффициент диффузии определяется по формуле

$$D=1/3\langle v\rangle\cdot\langle\lambda\rangle, \qquad \textbf{(1)}$$

где <*v*>— средняя арифметическая скорость молекул, равная

$$\langle v\rangle=\sqrt{8R/(\pi M)}; \qquad \textbf{(2)}$$

<λ>— средняя длина свободного пробега молекул. Для нахождения <λ> воспользуемся формулой из решения примера 3:

$$\langle\lambda\rangle=kT/(\sqrt{2}\cdot\pi d^2p). \qquad \textbf{(3)}$$

Подставляя (2) и (3) в выражение (1), имеем

$$D=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\cdot\frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2p}=\frac{2kT}{3\pi d^2p}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}. \qquad \textbf{(4)}$$

Коэффициент внутреннего трения

$$\eta=1/3\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\rho, \qquad \textbf{(5)}$$

где *ρ* — плотность газа при температуре 300К и давлении $10^5$Па. Для нахождения *ρ* воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Запишем его для двух состояний азота — при нормальных условиях $T_0$=273К, $p=1{,}01\cdot10^5$Па и в условиях задачи:

$$p_0V_0=(m/M)RT_0,\quad pV=(m/M)RT. \qquad \textbf{(6)}$$

Учитывая, что $\rho_0=m/V_0$, $\rho=m/V$, имеем

$$\rho=\rho_0pT_0/(p_0T). \qquad \textbf{(7)}$$

Коэффициент внутреннего трения газа может быть выражен через коэффициент диффузии (см. формулы (1) и (5)):

$$\eta = D \cdot p = D p_0 p T_0/(p_0 T) \qquad (8)$$

Подставляя числовые значения в (4) и (8), получим

$$D = \frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К} \cdot 300\ \text{К}}{3 \cdot 3{,}134 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20}\ \text{м}^2 \cdot 10^5\ \text{Па}} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 300\ \text{К}}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}}} =$$

$$= 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с};$$

$$\eta = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с} \cdot 1{,}25\ \text{кг/м}^3 \cdot \frac{10^5\ \text{Па} \cdot 273\ \text{К}}{1{,}01 \cdot 10^5\ \text{Па} \cdot 300\ \text{К}} =$$

$$= 5{,}23 \cdot 10^{-5}\ \text{кг/(м} \cdot \text{с)}.$$

**Ответ: $D=4{,}7 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\eta=5{,}23 \cdot 10^{-5}$ кг/(м•с).**

17. Кислород массой 160г нагревают при постоянном давлении от 320 до 340К. Определить количество теплоты, поглощенное газом, изменение внутренней энергии и работу расширения газа.

Дано: m=160г=$16 \cdot 10^{-2}$кг, $T_1$=320К, $T_2$=340К.

Найти: Q; $\Delta$U; *A*.

**Решение**. Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении,

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) = (m/M)C_p(T_2 - T_1). \qquad (1)$$

Здесь $C_p$ и $C_p = M \cdot c_p$— удельная и молярная теплоемкости газа при постоянном давлении; $M=32 \cdot 10^{-3}$кг/моль— молярная масса кислорода. Для всех двухатомных газов

**$C_p$=7/2 R; $C_p$=3,5•8,31Дж/(моль•К)=29Дж/(моль•К).**

Изменение внутренней энергии газа находим по формуле

$$\Delta U = (m/M)C_V(T_2 - T_1), \qquad (2)$$

где $C_V$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Для всех двухатомных газов

**$C_V$=5/2R; $C_V$=2,5•8,31Дж/(моль•К)=20,8Дж/(моль•К).**

Работа расширения газа при изобарном процессе A=p•$\Delta$V, где $\Delta V = V_2 - V_1$— изменение объема газа, которое можно найти из уравнения Клапейрона — Менделеева. При изобарном процессе:

$$PV_1 = (m/M)\, RT_1 \qquad (3)$$

$$PV_2 = (m/M)\, RT_2 \qquad (4)$$

Почленным вычитанием выражения (4) из (3) находим

$$p(V_2 - V_1) = (m/M)R(T_2 - T_1),$$

следовательно,

$$A = (m/M)R(T_2 - T_1). \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в формулы (1), (2) и (5), получаем:

$$Q = \frac{16 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}} \cdot 29\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\ (340\ \text{К} - 320\ \text{К}) = 2900\ \text{Дж};$$

$$\Delta U = \frac{16 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}} \cdot 20{,}8\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\ (340\ \text{К} - 320\ \text{К}) = 2080\ \text{Дж};$$

$$A = \frac{16 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}}{32 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}} \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\ (340\ \text{К} - 320\ \text{К}) = 840\ \text{Дж}.$$

**Ответ: Q=2900Дж; $\Delta$U=2080Дж; A=840Дж.**

18. Объем аргона, находящегося при давлении 80кПа, увеличился от 1 до 2л. На сколько изменится внутренняя энергия газа, если расширение производилось: а) изобарно; б) адиабатно.

Дано:$V_1$=10м³, $V_2$=2•10м³, p=0,8•10⁵Па, M=$40 \cdot 10^{-3}$кг/моль, i=3.

Найти: $\Delta$U

**Решение.** Применим первый закон термодинамики. Согласно этому закону, количество теплоты *Q*, переданное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии ΔU и на внешнюю механическую работу *A:*

$$Q=\Delta U+A \qquad (1)$$

Величину ΔU можно определить, зная массу газа m, удельную теплоемкость при постоянном объеме $C_V$ и изменение температуры ΔT:

$$\Delta U=m\cdot c_V\cdot\Delta T \qquad (2)$$

Однако удобнее изменение внутренней энергии ΔU определять через молярную теплоемкость $C_V$, которая может быть выражена через число степеней свободы:

$$c_V=\frac{C_V}{M}=\frac{i}{2}\frac{R}{M}. \qquad (3)$$

Подставляя величину $c_v$ из формулы (3) в (2), получаем

$$\Delta U=\frac{m}{M}\cdot\frac{i}{2}R\cdot\Delta T. \qquad (4)$$

Изменение внутренней энергии зависит ***от*** характера процесса, при котором идет расширение газа. При изобарном расширении газа, согласно первому закону термодинамики, часть количества теплоты идет на изменение внутренней энергии ΔU, которая выражается формулой (4) Найти ΔU для аргона по формуле (4) нельзя, так как масса газа и температура в условии задачи не даны. Поэтому необходимо провести преобразование формулы (4).

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$pV_1=(m/M)RT_1;\ pV_2=(m/M)RT_2,$$

или

$$p(V_2-V_1)=(m/M)R(T_2-T_1). \qquad (5)$$

Подставив (5) в формулу (4), получим

$$\Delta U=\frac{i}{2}p(V_2-V_1). \qquad (6)$$

Это уравнение является расчетным для определения ΔU при изобарном расширении.

При адиабатном расширении газа теплообмена с внешней средой не происходит, поэтому Q=0**.** Уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta U+A=0. \qquad (7)$$

Это соотношение устанавливает, что работа расширения газа может быть произведена только за счет уменьшения внутренней энергии газа (знак минус перед ΔU):

$$A=-\Delta U \qquad (8)$$

Формула работы для адиабатного процесса имеет вид

$$A=\frac{m}{M}\cdot\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right], \qquad (9)$$

где *γ*— показатель степени адиабаты, равный отношению теплоемкостей:

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{i+2}{i}.$$

Для аргона— одноатомного газа (i=3)— имеем *γ*=1,67**.**

Находим изменение внутренней энергии при адиабатном процессе для аргона, учитывая формулы (8) и (9):

$$\Delta U=\frac{m}{M}\cdot\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right]. \qquad (10)$$

Для определения работы расширения аргона формулу (10) следует преобразовать, учитывая при этом параметры, данные в условии задачи. Применив уравнение

Клапейрона — Менделеева для данного случая $p_1V_1 = (m/M)RT_1$, получим выражение для подсчета изменения внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right]. \qquad (11)$$

Подставляя числовые значения в (6) и (11), имеем:

а) при изобарном расширении

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 121 \text{ Дж};$$

б) при адиабатном расширении

$$\Delta U = \frac{0{,}8 \cdot 10^5 \text{ Па} \ \ 10^{-3} \text{ м}^3}{(1{,}67-1)}\left[\left(\frac{10^{-3} \text{ м}^3}{2 \ \ 10^{-3} \text{ м}^3}\right)^{1{,}67-1} - 1\right] = -44{,}6 \text{ Дж}.$$

**Ответ: а) $\Delta U$=121Дж; б) $\Delta U$=-44,6Дж.**

19. Температура нагревателя тепловой машины 500К. Температура холодильника 400К. Определить к.п.д. тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675Дж теплоты.

Дано: T=500K, $T_o$=400K, Q=1675Дж

Найти: η, N.

**Решение.** Коэффициент полезного действия машины определяется по формуле

$$\eta = (T - T_0)/T \qquad (1)$$

или

$$\eta = A/Q \qquad (2)$$

Из выражений (2) и (1) находим

$$A = \eta \bullet Q = (T - T_0)/T \bullet Q$$

Произведем вычисления:

$$\eta = (500K - 400K)/500K = 0{,}2$$

$$A = 0{,}2 \bullet 1675 \text{Дж} = 335 \text{Дж}.$$

Эта работа совершается за 1с, следовательно, полная мощность машины 335Вт.

**Ответ: η=0,2,N=335Вт.**

20. Горячая вода некоторой массы отдает теплоту холодной воде такой же массы и температуры их становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом увеличивается.

**Решение.** Пусть температура горячей воды $T_1$ холодной $T_2$, а температура смеси Θ. Определим температуру смеси, исходя из уравнения теплового баланса

$$m \cdot c(T_1 - \Theta) = m \cdot c(\Theta - T_2), \text{ или } T_1 - \Theta = \Theta - T_2,$$

откуда

$$\Theta = (T_1 + T_2)/2. \qquad (1)$$

Изменение энтропии, происходящее при охлаждении горячей воды,

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{\Theta} \frac{c \ \ m \ \ dT}{T} = c \cdot m \ln\frac{\Theta}{T_1}.$$

Изменение энтропии, происходящее при нагревании холодной воды,

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{\Theta} \frac{c \cdot m \cdot dT}{T} = c \cdot m \cdot \ln\frac{\Theta}{T_2}$$

Изменение энтропии системы равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = c \cdot m \cdot \ln\frac{\Theta}{T_1} + c \cdot m \ln\frac{\Theta}{T_2} = c \cdot m \ln\frac{\Theta^2}{T_1 \ \ T_2},$$

или с учетом соотношения (1) имеем

$$\Delta S = c \cdot m \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2};$$

так как $(T_1 + T_2)^2 > 0$ и $4T_1 T_2 > 0$, то $\Delta S > 0$.