1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала.

Если производные от неизвестной функции, входящие в уравнение, берутся только по одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Уравнения, содержащие производные по нескольким независимым переменным, называются дифференциальными уравнениями в частных производных. В данном пособии будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок наивысшей (старшей) производной, входящей в дифференциальное уравнение, определяет порядок дифференциального уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение *n*-го порядка в самом общем виде записывается так:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^n\right) = 0 \tag{1.1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция, x -независимая переменная, $y'(x)$, $y''(x)$, ...,y^n $x = x_0(x)$ - производные от неизвестной функции.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{1.2}$$

Обычно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано или в форме, разрешенной относительно производной

$$y' = f\left(x, y\right). \tag{1.3}$$

или в форме, содержащей дифференциалы

$$M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0. \tag{1.4}$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. График решения дифференциальною уравнения называется интегральной кривой.

Отличительное свойство дифференциальных уравнений состоит в том, что при их интегрировании обычно получается бесчисленное множество решений. Для уравнения первого порядка это множество описывается одной произвольной постоянной. Чтобы выделить из бесконечного множества решений то, которое описывает именно данный процесс, необходимо задать дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса. Такое дополнительное условие называется начальным условием. Оно ставится так: требуется, чтобы при некотором начальном значении независимой переменной $x = x_0$ искомая функция равнялась заданному числу y_0 :

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.5}$$

Задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка совместно с начальным условием называется начальной задачей или задачей Коши.

Для дифференциальных уравнений первого порядка различают общее, частное и особое решения, а также общий, частный и особый интегралы.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, называется такое семейство функций $y = \varphi(x, C)$, зависящих от x и произвольной постоянной C , что

1) при любом допустимом значении постоянной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения;

2) каково бы ни было начальное условие (1.5), можно подобрать такое значение постоянной C_0 , что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять условию $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, которое получается из общего при каком-либо конкретном значении $C = C_0$ произвольной постоянной , то есть функция вида $y = \varphi(x, C_0)$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения можно определить как множество всех частных решений уравнения.

Особым решением дифференциального уравнения называется решение, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной.

Часто при интегрировании уравнения первого порядка не удается найти общее решение в явном виде, а получается конечное (не дифференциальное) соотношение вида

$$\hat{O}\left(x,y,C\right)=0\ , \tag{1.6}$$

содержащее решение y в неявной форме. Такое соотношение называется общим интегралом дифференциального уравнения. Частным интегралом называется соотношение, которое получается из общего интеграла при конкретном значении произвольной постоянной.

Геометрически общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка изображается семейством интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра *C*. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через начальную точку $\left(x_0,y_0\right)$.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными имеет вид

$$M\left(x\right)dx+N\left(y\right)dy=0 \tag{1.7}$$

В уравнении с разделенными переменными перед дифференциалом dx стоит функция только одной переменной x, а перед дифференциалом dy стоит функция переменной y. Такие уравнения можно почленно интегрировать. В результате получим

$$\int M\left(x\right)dx+\int N\left(y\right)dy=C$$

или

$$F\left(x\right)+\Phi\left(y\right)=C, \tag{1.8}$$

где

$$F\left(x\right)=\int M\left(x\right)dx,\Phi\left(y\right)=\int N\left(y\right)dy.$$

Конечное (не дифференциальное) соотношение (1.8) и является общим интегралом уравнения (1.7).

Пример. Решить уравнение $e^x dx+\ln y dy=0$

Очевидно, это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, получим

$$\int e^x dx+\int \ln y dy=C$$

Следовательно, общий интеграл уравнения будет $e^x+y\left(\ln y-1\right)=C$

Дифференциальное уравнение вида

$$M_1\left(x\right)N_1\left(y\right)dx+M_2\left(x\right)N_2\left(y\right)dy=0\,, \tag{1.9}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Уравнение (1.9) делением обеих частей на произведение функций $N_1(y)M_2(x)\neq 0$ приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$$

общий интеграл которого

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$$

1.3. Однородные дифференциальные уравнения

Если уравнение $y'=f(x,y)$ или $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ не меняется при замене x на kx , а y на ky , то оно называется однородным. Однородное дифференциальное уравнение подстановкой $t=\frac{y}{x}$ приводится к уравнению с разделенными переменными.

Пример. Решить уравнение $(x+y)dx+(y-x)dy=0$.

Преобразуем уравнение к виду

$$y'=\frac{x+y}{y-x}$$

Так как

$$\frac{kx+ky}{ky-kx}=\frac{x+y}{x-y}$$

то исходное уравнение однородное.

Полагаем $t=\frac{y}{x},\rightarrow y=tx$ и $y'=t'x+t$

Тогда уравнение примет вид

$$t'x+t=\frac{x+tx}{x-tx} \text{ или } x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t}{1-t}-t\,,\;\; xdt=\frac{1+t^2}{1-t}dx$$

Разделив обе части уравнения на $\left(x\frac{1+t^2}{1-t}\right)$,

приходим к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}$$

Интегрируя его, находим

$$arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$$

или

$$arctgt-\ln\left(x\sqrt{1+t^2}\right)=C$$

Возвращаясь к старой переменной, получим общий интеграл исходного уравнения в виде

$$C=arctg\frac{y}{x}-\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

1.4. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P\left(x\right)y=Q\left(x\right) \tag{1.10}$$

содержащее искомую функцию и ее производную в первой степени. Функции $P(x)$ и $Q(x)$ предполагаются непрерывными.

Если правая часть уравнения $Q(x) = 0$, то уравнение (1.10) называется линейным однородным уравнением, в противном случае - линейным неоднородным.

Рассмотрим интегрирование этого уравнения методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа). В соответствии с этим методом сначала ищется решение соответствующего линейного однородного уравнения: $y' + P(x)\, y = 0$. Разделяя в нем переменные, получим его общее решение в виде

$$\frac{dy}{dx}=-P\left(x\right)y,\qquad \frac{dy}{y}=-P\left(x\right)dx,\qquad \ln y=-\int P\left(x\right)dx+\ln C,$$

$$y=Ce^{-\int P(x)}dx. \tag{1.11}$$

Далее ищется общее решение исходного уравнения с ненулевой правой частью в виде (1.11), но произвольная постоянная в (1.11) заменяется неизвестной функцией:

$$y=v\left(x\right)e^{-\int P(x)dx} \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.10), получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно варьируемой функции v(x), интегрируя которое, находим эту функцию.

В результате, общее решение уравнения (1.10) может быть представлено в виде

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \tag{1.13}$$

Формула (1.13) дает общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка в форме Коши.

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y' - 4y = x$ при начальном условии *y(0)=1*.

Находим сначала общее решение линейного однородного уравнения

$$y' - 4y = 0$$

Оно имеет вид

$$y = Ce^{-\int P(x)}dx = Ce^{-\int -4dx} = Ce^{4x}$$

Заменяем произвольную постоянную *C* в этом решении неизвестной функцией *v(x)*:

$$y = v(x)e^{4x}$$

Вычисляем производную y'

$$y' = v'(x)e^{4x} + 4v(x)e^{4x}$$

и подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$v'(x)e^{4x} + 4v(x)e^{4x} - 4v(x)e^{4x} = x, \to v'(x)e^{4x} = x$$

$$v'(x) = xe^{-4x}, v(x) = \int xe^{-4x}dx + C = -\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x + \frac{1}{4}\right) + C$$

Общее решение уравнения примет вид

$$y = v(x)e^{4x} = \left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\left(x + \frac{1}{4}\right) + C\right)e^{4x} = Ce^{4x} - \frac{x + 1/4}{4}$$

Находим произвольную постоянную С из начального условия:

при $x = 0$

$$C - \frac{1}{16} = 1, \to C = \frac{17}{16}$$

Следовательно, решение задачи Коши будет

$$y = \frac{1}{16}\left(17e^{4x} - (4x + 1)\right).$$

Решение линейного дифференциального уравнения (1.10) может быть также получено, если искомую функцию представить в виде произведения двух произвольных функций (метод Бернулли [4]):

1.5. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{1.14}$$

где $n \neq 0;1$.

Уравнение Бернулли является нелинейным, но оно приводится к линейному следующим преобразованием:

1) Обе части уравнения умножаются на y^{-n}, тогда

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

2) Далее применяется подстановка

$$z = y^{1-n}$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y', \qquad \text{следовательно,} \qquad y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

В результате уравнение становится линейным относительно функции z:

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x) \qquad (1.15)$$

Уравнение (1.15) может быть решено методом вариации произвольной постоянной или методом Бернулли.

Пример. Решить уравнение $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\ln x}{x}y^2$.

Умножим обе части уравнения на y^{-2}: $\quad y^{-2}y' + \dfrac{y^{-1}}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.

Положим $z = y^{-1}$, $\to$ $z' = -y^{-2}y'$, и уравнение преобразуется в линейное:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x} \qquad (1.16)$$

Находим сначала решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}, \qquad \ln|z| = \ln|x| + \ln C, \qquad z = Cx.$$

Решение неоднородного уравнения (1.16) отыскиваем в виде

$$z = v(x)x.$$

тогда $\qquad z' = v'(x)x + v(x).$

$$\frac{dv(x)}{dx}x + v(x) - \frac{v(x)x}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{dv(x)}{dx}x = -\frac{\ln x}{x},$$

$$\int dv(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx + C$$

После интегрирования получим

$$v(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C, \qquad z=v(x)x=\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)x,$$

поэтому общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y=\frac{1}{\ln x+1+Cx}$$

1.6. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.17}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если коэффициенты $M(x,y)$è$N(x,y)$ представляют собой непрерывные и дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.18}$$

Условие (1.18) есть необходимое и достаточное условие того, что левая часть уравнения (1.17) представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух независимых переменных $du(x,y)$. Поэтому уравнение (1.17) может быть представлено в компактной форме

$$du(x,y)=0$$

Следовательно, его общий интеграл, а значит, и общий интеграл уравнения (1.17) имеет вид
$u(x,y)=C$.

Как известно, полный дифференциал функции двух переменных равен

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{1.19}$$

Сравнивая выражение (1.19) и левую часть уравнения (1.17), можно заключить, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \tag{1.20}$$

Интегрируя, например, первое из выражений (1.20), получим

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y), \tag{1.21}$$

где $\varphi(y)$ - произвольная функция интегрирования (в частности, она может быть константой). Заметим, что при вычислении интеграла в (1.21) функция y рассматривается как постоянная. Функция $\varphi(y)$ определяется из решения дифференциального уравнения, получающегося из соотношения (1.21) и второго условия (1.20).

Пример. Решить уравнение

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0 \qquad (1.22)$$

Здесь $M\left(x,y\right)=3x^2+6xy^2$, $N\left(x,y\right)=6x^2y+4y^3$ и $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy$

Поэтому уравнение (1.22) является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M\left(x,y\right)=3x^2+6xy^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N\left(x,y\right)=6x^2y+4y^3,$$

$$u=\int M\left(x,y\right)dx+\varphi\left(y\right)=\int\left(3x^2y+6xy^2\right)dx+\varphi\left(y\right)=x^3+3x^2y^2+\varphi\left(y\right)$$

Дифференцируя последнее равенство по у и приравнивая значению N, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\varphi'\left(y\right)=6x^2y+4y^3,\rightarrow$$

$$\varphi'\left(y\right)=4y^3.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\varphi\left(y\right)=y^4+C_1$$

Таким образом,

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi\left(y\right)=x^3+3x^2y^2+y^4+C_1=C_2$$

и при $C=C_2-C_1$, общий интеграл исходного уравнения запишется в виде

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

Если левая часть уравнения $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ не является полным дифференциалом, то при определенных условиях, налагаемых на функции $M\left(x,y\right),N\left(x,y\right)$, можно найти такую функцию $\mu=\mu\left(x,y\right)$, что

Выражение $\mu\left(M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy\right)$ становится полным дифференциалом. Функция $\mu=\mu\left(x,y\right)$ при этом называется интегрирующим множителем.

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ N-го ПОРЯДКА

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное

относительно старшей производной, имеет вид

$$y^n=f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right). \qquad (2.1)$$

Общим решением уравнения n-го порядка называется непрерывно дифференцируемая n раз функция $y(x, C_1, C_2, ... C_n)$, удовлетворяющая уравнению и содержащая n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, подходящим выбором которых можно получить любое решение.

Решение, получаемое из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется частным решением.

Конкретные значения произвольных постоянных могут быть найдены из n начальных или граничных условий, задаваемых, исходя из физических особенностей задачи. Соответственно этому различают начальную задачу (задачу Коши) или краевую (граничную) задачу.

Задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка называется начальной задачей или задачей Коши, если значения искомой функции и её производных до *(n-1)*-го порядка включительно задаются при одном и том же начальном значении независимой переменной (при $x = x_0$):

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_0',$$
$$y''(x_0) = y_0'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка называется краевой (или граничной) задачей, если значения искомой функции (а возможно её производных) задаются не в одной, а в двух точках, а именно на концах фиксированного интервала изменения независимой переменной x.

Например, для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, при $o \le x \le L$ граничные условия могут иметь вид: $y(0) = y(L) = 0$ или, $y(0) = 0, y'(L) = 0$.

В отличие от задачи Коши, решение которой существует и единственно (при некоторых весьма общих условиях, налагаемых на правую часть уравнения (2.1)), краевая задача может не иметь решения или решение может быть не единственным.

2.1. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка методом понижения порядка

Если правая часть уравнения (2.1) является известной непрерывной функцией $f(x)$ только одной переменной x или не содержит искомую функцию $y: f\left(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, или не содержит явно независимую переменную x: $f\left(y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, то для решения уравнения (2.1) может быть применен метод понижения порядка.

1. $$y^{(n)}(x) = f(x) \qquad (2.2)$$

Это уравнение интегрируется непосредственно n раз. При каждом интегрировании порядок уравнения понижается на единицу, и появляется произвольная постоянная. В результате общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = \int\int...\int f(x)dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_{n-1}x \ + C_{n,} \qquad (2.3)$$

где в правой части - n-кратный интеграл от функции $f(x)$ и многочлен *(n-1)*-ой степени от x, коэффициентами которого являются n произвольных постоянных.

2. $$y^n = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) не содержит искомой функции $y(x)$. Рассмотрим процедуру интегрирования уравнения данного типа на примере уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y) \qquad (2.5)$$

Понижение порядка достигается подстановкой

$$y'(x) = z(x) \qquad (2.6)$$

Тогда

$$y''(x) = z'(x), \qquad (2.7)$$

и уравнение (2.5) приводится к уравнению первого порядка относительно функции $z(x)$:

$$z' = f(x, z) \qquad (2.8)$$

Интегрируя уравнение (2.8), находим его общий интеграл в виде

$$z(x) = \varphi(x, C_1), \qquad (2.9)$$

где C_1 - произвольная постоянная. Далее в (2.9) заменяем левую часть согласно (2.6) и вновь получаем уравнение первого порядка относительно искомой функции y:

$$y'(x) = \varphi(x, C_1), \qquad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.10), находим общее решение исходного уравнения (2.4) в виде

$$y(x) = \xi(x, C_1, C_2). \qquad (2.11)$$

Замечание. Если уравнение (2.4) не содержит ни искомой функции y, ни её производных до (к-1) - го порядка включительно, то есть имеет вид

$$y^n = f\left(x, y^k, y^{k+1}, ..., y^{(n-1)}\right).$$

то его порядок может быть понижен сразу на к единиц подстановкой

$$y^k(x)=z(x)$$

Пример. Решить уравнение $x^3y^{IV}+x^2y'''=1$.

Это уравнение не содержит явно искомой функции $y(x)$ и её первых производных y', y'' и относится ко второму из рассмотренных нами типов. Применяя подстановку

$$y'''(x)=z(x), \tag{2.12}$$

получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$x^3z'+x^2z=1$$

или

$$z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x^3} \tag{2.13}$$

Интегрируем его методом вариации произвольной постоянной. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$z'+\frac{1}{x}z=0. \tag{2.14}$$

Разделяем в нем переменные:

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}$$

После интегрирования получим

$$\ln z=-\ln x+\ln C_1=\ln\frac{C_1}{x}$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.14) будет

$$z=\frac{C_1}{x} \tag{2.15}$$

Далее ищем решение уравнения (2.13) в форме, аналогичной по структуре выражению (2.15), но произвольную постоянную в (2.15) заменяем неизвестной функцией *v(x)*:

$$z=\frac{v(x)}{x} \tag{2.24}$$

Подставляя (2.16) в (2.13), получим

$$\frac{v'(x)x-v(x)}{x^2}+\frac{v(x)}{x^2}=\frac{1}{x^3}$$

откуда следует

$$\frac{dv(x)}{dx}=\frac{1}{x^2}$$

и, после разделения переменных, $dv(x)=\frac{dx}{x^2}$

Интегрируя это уравнение, находим $v(x) = -\frac{1}{x} + C_1$. Поэтому согласно (2.16) имеем

$$z = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}. \tag{2.17}$$

Заменяя в выражении (2.17) z по формуле (2.12), приходим к уравнению третьего порядка относительно искомой функции *y(x)*:

$$y''' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x} \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) содержит в правой части известную функцию от x и относится к первому из рассмотренных нами типов (см. (2.2)). Интегрируя его последовательно три раза, окончательно получим общее решение исходного уравнения, содержащее 4 произвольных постоянных:

$$y'' = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2,$$

$$y' = \ln x + C_1 x(\ln x - 1) + C_2 x + C_3,$$

$$y = x(\ln x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

2.2. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.19}$$

содержащее неизвестную функцию и все её производные до n-го порядка включительно в первой степени. В (2.19) коэффициенты $a_i = const$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В общем случае, если хотя бы один из коэффициентов a_i является функцией от x, то уравнение (2.19) будет уравнением с переменными коэффициентами.

Левая часть уравнения (2.19) называется линейным дифференциальным оператором и обозначается через

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y.$$

Поэтому в компактной форме уравнение (2.19) запишется так:

$$L(y) = f(x).$$

Если правая часть уравнения $f(x) = 0$, то уравнение (2.19) принимает вид

$$L(y) = 0 \tag{2. 20}$$

и называется линейным однородным дифференциальным уравнением, в противном случае - неоднородным.

Справедлива теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка): общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n - го порядка представляется в виде суммы

$$y = y_0 + y_*, \tag{2.21}$$

где y_0 - общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, y_* - частное решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$.

2.2.1. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка): Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения *n* -го порядка *L(y) = 0* представляется в виде линейной комбинации n линейно независимых частных решений этого уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_k y_k = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n. \tag{2.22}$$

Здесь $C_1, C_2, ..., C_n$ - произвольные постоянные (заметим, что линейной комбинацией функций называется сумма произведений функций на различные постоянные числа, то есть выражение вида $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$); $y_1, y_2, ..., y_n$-частные линейно независимые решения однородного уравнения $L(y) = 0$ - такие решения, для которых, составленный из них определитель не равен нулю:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n-1)}{}_1 & y_2{}^{(n-1)} & \cdots & y_n{}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определитель *W* называется определителем Вронского или вронскианом.

N линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Для построения фундаментальной системы решений уравнения $L(y) = 0$ с постоянными коэффициентами его частные решения ищутся в виде показательных функций

$$y = e^{kx}, \qquad (2.23)$$

где k - неизвестные постоянные числа. Подстановка (2.23) в дифференциальное уравнение (2.20) приводит к алгебраическому уравнению вида

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (2.24)$$

Алгебраическое уравнение (2.24) той же степени, что и порядок дифференциального уравнения (2.20), с теми же коэффициентами на соответствующих местах называется характеристическим уравнением.

Заметим, что характеристическое уравнение (2.24) получается из дифференциального уравнения (2.20) формальной заменой i-ой производной $y^{(i)}$ числом $k^{(i)}$.

Характеристическое уравнение (2.24) имеет n корней (с учетом их кратности). В зависимости от вида корней соответствующие частные линейно независимые решения будут иметь различный вид (см. таблицу 1).

Составляя линейную комбинацию этих решений, получим общее решение линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ в виде (2.22).

Таким образом, построение общего решения линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами сводится к чисто алгебраической проблеме решения соответствующих характеристических уравнений.

Построение решения однородных линейных дифференциальных уравнений является обязательным первым этапом решения более общих неоднородных уравнений (2.19). Поэтому примеры построения фундаментальной системы решений для однородных уравнений приведены ниже.

Таблица 1

Вид частных решений линейного однородного уравнения L(y)=0 в зависимости от вида корней характеристического уравнения

	Вид корней	***Вид частных решений***
1	Корни k_i ($i = 1, 2, ..., n$) действительны и различны	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ………, $y_n = e^{k_n x}$
2a	Комплексные корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.
2b	Мнимые корни $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$	$y_1 = \cos \beta x$, $y_2 = \sin \beta x$

3a	Кратные действительные корни $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = k$ ($m-$кратность корня)	$y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2e^{kx}$, $\ldots\ldots\ldots$, $y_m = x^{m-1}e^{kx}$	
3b	Кратные комплексные корни: $k_1 = \alpha + \beta i$ кратности m, $k_1 = \alpha - \beta i$ кратности m	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_5 = x^2e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$	$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$ $y_6 = x^2e^{\alpha x}\sin\beta x.$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Частное решение y_*, неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.19) может быть получено или методом подбора (методом неопределенных коэффициентов) или методом вариации произвольных постоянных.

2.2.2. Метод подбора частного решения

Этот метод называют ещё методом неопределенных коэффициентов.

Он не является универсальным и применим, если правая часть уравнения (2.19) в общем случае имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (2.25)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - одночлены или многочлены (в общем случае различных степеней от x). Пусть при этом n - наивысшая степень одного из многочленов $P(x)$ или $Q(x)$.

Алгоритм построения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.19) следующий:

1. Находим корни характеристического уравнения (2.24).
2. Сравниваем заданную правую часть уравнения (2.19) с общим выражением (2.15), при котором применим метод подбора, и находим из этого сопоставления три числа:.
3. Сравниваем «контрольное» комплексное число $(\alpha + \beta i)$ с корнями характеристического уравнения и находим число m корней, совпавших с комплексным числом $\alpha + \beta i$ (если таких корней нет, то $m=0$).
4. Принимаем частное решение неоднородного уравнения (2.19) в виде

$$y_* = x^m\left[R_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + T_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right], \qquad (2.26)$$

где $R_n(x), T_n(x)$ - многочлены одной и той же n-ой степени, но с неопределёнными и различными коэффициентами.

5. Записываем решение (2.26) в развернутой форме в зависимости от n.

Так, если n = 0, $y_* = x^m\left[Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x\right]$,

если $n = 1$ то, $y_* = x^m\left[R_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + T_1(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right] =$

$$= x^m\left[(Ax+B)e^{\alpha x}\cos\beta x + (Cx+D)e^{\alpha x}\sin\beta x\right].$$

6. Подставляем y, в исходное уравнение (2.19) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов A, B, C,D,...

Замечания.

1. Если правая часть уравнения (2.19) имеет более простой вид, например, содержит произведение степенной функции на показательную

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

(в частности, возможны случаи $n=0$ или (и) $\alpha = 0$), или содержит только линейную комбинацию тригонометрических функций вида

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$$

где M и N - постоянные числа, то частные решения неоднородного уравнения можно искать в форме, указанной в таблице 2 (в неё для полноты включен также общий случай).

2. Правая часть уравнения $L(x) = f(x)$ может содержать только функцию вида $f(x) = M\cos\beta x$ или функцию вида $f(x) = N\sin\beta x$. Но частное решение методом подбора следует искать в полной форме, содержащей и $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Строгое и подробное изложение теории дифференциальных уравнений и примеры решения уравнений содержится во многих учебниках и [1-5].

Процедура подбора неопределённых коэффициентов показана в пособиях $[4,6]$.

2.2.3. Метод вариации произвольных постоянных

Если известно общее решение однородного линейного дифференциального уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его частное решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Рассмотрим его реализацию для линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (2.27)$$

Сначала находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2.28}$$

где C_1, и C_2 - произвольные постоянные, y_1 и y_2 - частные линейно независимые решения однородного уравнения.

Далее ищем решение неоднородного уравнения (2.27), аналогичное по структуре (2.28), но произвольные постоянные в (2.28) заменяем неизвестными функциями, а именно принимаем

$$y_0 = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \tag{2.29}$$

Подстановка (2.29) в (2.27) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}, \tag{2.30}$$

в которой первое уравнение вводится произвольно (как дополнительное условие, налагаемое на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$). Определитель этой системы - определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как функции y_1 и y_2 линейно независимы. Поэтому система (2.30), рассматриваемая как система линейных алгебраических уравнений относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, имеет решение и притом единственное. Оно представляется в виде

$$C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W} \tag{2.31}$$

Интегрируя дифференциальные уравнения первого порядка (2.31), находим

$$C_1'(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + C_1, \; C_2'(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx + C_2 \tag{2.32}$$

Подставляя (2.32) в (2.29), получим общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx. \tag{2.33}$$

Последние два слагаемых в правой части формулы (2.33) определяют частное решение неоднородного уравнения (2.27).

Таким образом, если известна фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения y_1, y_2, то общее решение неоднородного уравнения может быть найдено с помощью квадратур (то есть неопределенных интегралов от этих решений).

Замечание. Метод вариации произвольных постоянных является общим методом, пригодным для построения решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (как с переменными, так и с постоянными коэффициентами) при произвольной непрерывной правой части. Но он является принципиально более сложным, чем метод подбора, так как его реализация связана с интегрированием дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правыми частями специального вида проще применять метод подбора частного решения.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x} \tag{2.34}$$

1). Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = -2$. Следовательно, частные линейно независимые решения равны (см. таблицу 1, случай 3а) $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, а общее решение

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

2). Так как правая часть неоднородного уравнения (2.34) не относится ни к одному из случаев для метода подбора, то частное решение находим методом вариации произвольных постоянных. Принимаем

$$y = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}, \tag{2.35}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ -неизвестные (варьируемые) функции. Тогда их производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ могут быть найдены из решения системы (2.30):

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x) x e^{-2x} = 0, \\ -2C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x)\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = \dfrac{e^{-2x}}{x}. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}.$$

Поэтому для определения варьируемых функций согласно (2.31) получаем дифференциальные уравнения вида

$$C_1'(x) = -\frac{xe^{-2x}e^{-2x}}{xe^{-4x}} = -1, \quad C_2'(x) = \frac{e^{-2x}e^{-2x}}{xe^{-4x}} = \frac{1}{x}. \tag{2.36}$$

Интегрируя уравнения (2.36), находим

$$C_1(x) = -x + C_1, \;\; C_2(x) = \ln x + C_2. \tag{2.37}$$

Подставляя (2.37) в (2.35), получим общее решение уравнения в виде

$$y = e^{-2x}\left[C_1 + C_2 x + x\left(\ln x - 1\right)\right].$$